Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Krawędzie i wierzchołki ostrosłupa

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Jeśli podstawa ma n boków, ostrosłup ma $2n$ krawędzi i $n+1$ wierzchołków. Stąd $2n-(n+1)=9$, czyli $n=10$. Podstawą jest dziesięciokąt. Odpowiedź: D.

Odpowiedź: D

1 / Od schematu do wyzwania

1. Ostrosłup ma o 4 krawędzi więcej niż wierzchołków. Ile boków ma podstawa i ile jest ścian?

Odpowiedź: $5;\ 6$

Jeśli podstawa ma m boków, to E=2 m, V=m+1. Różnica m−1=4 daje m=5. Ścian jest m+1=6.

2. Ostrosłup ma łącznie 16 krawędzi i wierzchołków. Wyznacz liczbę ścian.

Odpowiedź: 6

Suma wynosi 2 m+(m+1)=3 m+1. Równanie z 16 daje m=5; ścian jest 6.

3. Graniastosłup ma 15 krawędzi. Ile ma ścian i wierzchołków?

Odpowiedź: $7;\ 10$

W graniastosłupie n-bocznym E=3 n, F=n+2 oraz V=2 n.

4. Ostrosłup i graniastosłup mają podstawy o tej samej liczbie boków. Razem mają 25 krawędzi. Oblicz łączną liczbę ich wierzchołków.

Odpowiedź: 16

Krawędzi jest 2 m+3 m=5 m=25, więc m=5. Wierzchołków jest m+1+2 m=16.

5. Dla ostrosłupa o n-kątnej podstawie wykaż $V-E+F=2$. Wyjaśnij, dlaczego sama ta równość nie pozwala odtworzyć n.

Odpowiedź: $V-E+F=2$ dla każdego całkowitego $n\geq 3$.

Wstawiamy V=n+1, E=2 n, F=n+1. Wynik to n+1−2 n+n+1=2 niezależnie od n. Różne n spełniają tę samą równość, więc nie określa ona podstawy.

6. Dla jakich naturalnych W istnieją graniastosłup n-boczny i ostrosłup m-boczny mające tyle samo krawędzi i łącznie W wierzchołków? Podstawy mają co najmniej trzy boki. Uzasadnij pełną odpowiedź.

Odpowiedź: $W=7t+1,\quad t\geq 2,\ t\in\mathbb{N}$

Równość krawędzi daje 3 n=2 m, więc n=2 t i m=3 t dla dodatniego całkowitego t. Warunek n≥3 wymusza t≥2. Łączna liczba wierzchołków wynosi 2 n+(m+1)=4 t+3 t+1=7 t+1. Odwrotnie każda taka para podstaw istnieje i spełnia warunki.

2 / Małe kroki

1. Ostrosłup ma 5-kątną podstawę. Ile ma wierzchołków?

Odpowiedź: 6

Dodajemy n wierzchołków podstawy i jeden wierzchołek nad podstawą.

2. Ostrosłup ma 5-kątną podstawę. Ile ma krawędzi?

Odpowiedź: 10

Po n krawędzi podstawy i n krawędzi bocznych.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Ostrosłup ma podstawę 5-kątną. Ile ma ścian?

Odpowiedź: 6

Podstawa i m ścian bocznych.

2. Graniastosłup ma podstawę 5-kątną. Ile ma krawędzi?

Odpowiedź: 15

Po m na obu podstawach i m bocznych.

3. Ostrosłup ma 10 krawędzi. Ile boków ma podstawa?

Odpowiedź: 5

Liczbę krawędzi dzielimy przez 2.

4. Graniastosłup ma 10 wierzchołków. Ile boków ma podstawa?

Odpowiedź: 5

Połowa wierzchołków należy do jednej podstawy.

Grupa B

1. Ostrosłup ma podstawę 6-kątną. Ile ma ścian?

Odpowiedź: 7

Podstawa i m ścian bocznych.

2. Graniastosłup ma podstawę 6-kątną. Ile ma krawędzi?

Odpowiedź: 18

Po m na obu podstawach i m bocznych.

3. Ostrosłup ma 12 krawędzi. Ile boków ma podstawa?

Odpowiedź: 6

Liczbę krawędzi dzielimy przez 2.

4. Graniastosłup ma 12 wierzchołków. Ile boków ma podstawa?

Odpowiedź: 6

Połowa wierzchołków należy do jednej podstawy.

Grupa C

1. Ostrosłup ma podstawę 7-kątną. Ile ma ścian?

Odpowiedź: 8

Podstawa i m ścian bocznych.

2. Graniastosłup ma podstawę 7-kątną. Ile ma krawędzi?

Odpowiedź: 21

Po m na obu podstawach i m bocznych.

3. Ostrosłup ma 14 krawędzi. Ile boków ma podstawa?

Odpowiedź: 7

Liczbę krawędzi dzielimy przez 2.

4. Graniastosłup ma 14 wierzchołków. Ile boków ma podstawa?

Odpowiedź: 7

Połowa wierzchołków należy do jednej podstawy.

Grupa D

1. Ostrosłup ma podstawę 8-kątną. Ile ma ścian?

Odpowiedź: 9

Podstawa i m ścian bocznych.

2. Graniastosłup ma podstawę 8-kątną. Ile ma krawędzi?

Odpowiedź: 24

Po m na obu podstawach i m bocznych.

3. Ostrosłup ma 16 krawędzi. Ile boków ma podstawa?

Odpowiedź: 8

Liczbę krawędzi dzielimy przez 2.

4. Graniastosłup ma 16 wierzchołków. Ile boków ma podstawa?

Odpowiedź: 8

Połowa wierzchołków należy do jednej podstawy.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Ostrosłup ma podstawę 5-kątną.

Odpowiedź: 6

Pominięto wierzchołek nad podstawą.

2. Ostrosłup ma podstawę 5-kątną.

Odpowiedź: 10

3 m dotyczy graniastosłupa; ostrosłup ma m podstawowych i m bocznych.

3. Graniastosłup ma podstawę 5-kątną.

Odpowiedź: 7

Graniastosłup ma dwie podstawy i m ścian bocznych.

Grupa B

1. Ostrosłup ma podstawę 6-kątną.

Odpowiedź: 7

Pominięto wierzchołek nad podstawą.

2. Ostrosłup ma podstawę 6-kątną.

Odpowiedź: 12

3 m dotyczy graniastosłupa; ostrosłup ma m podstawowych i m bocznych.

3. Graniastosłup ma podstawę 6-kątną.

Odpowiedź: 8

Graniastosłup ma dwie podstawy i m ścian bocznych.

5 / Matematyka w świecie

1. Szkielet namiotu w kształcie ostrosłupa ma podstawę 5-kątną. Policz pręty odpowiadające wszystkim krawędziom.

Odpowiedź: 10

Szkielet zawiera po n prętów podstawy i bocznych.

2. Producent okleja każdą ścianę graniastosłupa o 5-kątnej podstawie jedną etykietą. Ile etykiet wymaga jeden model?

Odpowiedź: 7

Są n ściany boczne i dwie podstawy.

3. Umowny model kryształu jest ostrosłupem o podstawie 5-kątnej. Ile wierzchołków trzeba zaznaczyć w modelu?

Odpowiedź: 6

Zaznaczamy n narożników podstawy i jeden wierzchołek główny.

4. Szkielet ostrosłupa zawiera 10 prętów, po jednym na krawędź. Odtwórz liczbę boków podstawy i liczbę ścian.

Odpowiedź: 5; 6

E=2 n, więc n=E/2. Ścian jest o jedną więcej niż boków podstawy.