Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Równanie prostej i tangens kąta

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Nachylenie prostej AB to $\frac{8}{4} = 2$. Punkt A daje wyraz wolny -6, więc równanie ma postać $y = 2x - 6$. Kąt CAB mierzymy od pionu. W pomocniczym trójkącie prostokątnym bok przeciwległy ma długość 4, a przyległy 8. Tangens wynosi $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: D; A

1 / Od schematu do wyzwania

1. Wyznacz wzór prostej przechodzącej przez $(1, 8)$ i $(3, 14)$.

Odpowiedź: $y = 3x + 5$

$a = \frac{14-8}{3-1} = 3$. Z pierwszego punktu $b = 8 - 3 = 5$.

2. Prosta $y = -3x + 6$ przecina osie w A i B. Oblicz pole trójkąta OAB.

Odpowiedź: 6

Przecięcia to $A = (2, 0), B = (0, 6)$. Pole $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$.

3. Kąt nachylenia prostej do dodatniej półosi Ox ma tangens -3. Prosta przechodzi przez $(2, 1)$. Wyznacz wzór.

Odpowiedź: $y = -3x + 7$

Współczynnik kierunkowy równy jest tangensowi. Podstawiamy punkt: $1 = -6 + b$.

4. Punkt $P = (u, 3u + 5)$ leży na danej prostej. Znajdź u, dla którego OP^2 jest najmniejsze.

Odpowiedź: $u = -\frac{3}{2}$

$OP^2 = u^2 + (3u + 5)^2 = (10)u^2 + 30u + 25$. Minimum paraboli wypada w $u = -\frac{15}{10}$.

5. Udowodnij, że punkty A=(0,p), B=(q,0), C=(q,p) dla dodatnich p,q tworzą trójkąt o polu pq/2.

Odpowiedź: $\frac{pq}{2}$

Bok AC jest poziomy i ma długość q, a wysokość opuszczona z B wynosi p. Pole jest więc połową iloczynu p i q.

6. Prosta $y = -3x + c$ przecina dodatnie półosie w A,B. Wyznacz wszystkie c, dla których pole OAB jest równe 6.

Odpowiedź: $c = 6$

Warunek dodatnich przecięć daje c>0. Pole to $\frac{1}{2}c \cdot \frac{c}{3} = \frac{c^2}{6}$. Stąd $c^2 = 36$, więc jedynie c=6.

2 / Małe kroki

1. Podaj nachylenie $y = 3x + 1$.

Odpowiedź: 3

Odczytujemy współczynnik przy x.

2. $y = 3x + 1$. Oblicz y dla x=2.

Odpowiedź: 7

$y = 3 \cdot 2 + 1 = 7$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Dla $f(x) = 3x + 2$ oblicz $f(1)$.

Odpowiedź: 5

Podstawiamy x=1: $3 + 2 = 5$.

2. Podaj współczynnik kierunkowy $y = -3x + 2$.

Odpowiedź: -3

Odczytujemy współczynnik przy x wraz ze znakiem.

3. Oblicz nachylenie prostej przez $(0, 1), (2, 7)$.

Odpowiedź: 3

$a = \frac{7-1}{2-0} = 3$.

4. Gdzie $y = 3x + 2$ przecina oś Oy?

Odpowiedź: $(0, 2)$

Na osi Oy współrzędna x wynosi 0.

Grupa B

1. Dla $f(x) = 4x + 3$ oblicz $f(1)$.

Odpowiedź: 7

Podstawiamy x=1: $4 + 3 = 7$.

2. Podaj współczynnik kierunkowy $y = -4x + 3$.

Odpowiedź: -4

Odczytujemy współczynnik przy x wraz ze znakiem.

3. Oblicz nachylenie prostej przez $(0, 1), (2, 9)$.

Odpowiedź: 4

$a = \frac{9-1}{2-0} = 4$.

4. Gdzie $y = 4x + 3$ przecina oś Oy?

Odpowiedź: $(0, 3)$

Na osi Oy współrzędna x wynosi 0.

Grupa C

1. Dla $f(x) = 5x + 4$ oblicz $f(1)$.

Odpowiedź: 9

Podstawiamy x=1: $5 + 4 = 9$.

2. Podaj współczynnik kierunkowy $y = -5x + 4$.

Odpowiedź: -5

Odczytujemy współczynnik przy x wraz ze znakiem.

3. Oblicz nachylenie prostej przez $(0, 1), (2, 11)$.

Odpowiedź: 5

$a = \frac{11-1}{2-0} = 5$.

4. Gdzie $y = 5x + 4$ przecina oś Oy?

Odpowiedź: $(0, 4)$

Na osi Oy współrzędna x wynosi 0.

Grupa D

1. Dla $f(x) = 6x + 5$ oblicz $f(1)$.

Odpowiedź: 11

Podstawiamy x=1: $6 + 5 = 11$.

2. Podaj współczynnik kierunkowy $y = -6x + 5$.

Odpowiedź: -6

Odczytujemy współczynnik przy x wraz ze znakiem.

3. Oblicz nachylenie prostej przez $(0, 1), (2, 13)$.

Odpowiedź: 6

$a = \frac{13-1}{2-0} = 6$.

4. Gdzie $y = 6x + 5$ przecina oś Oy?

Odpowiedź: $(0, 5)$

Na osi Oy współrzędna x wynosi 0.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Wyznaczono nachylenie przez $(0, 1), (2, 9)$.

Odpowiedź: $a = 4$

Należy dzielić zmianę y przez zmianę x, a nie odwrotnie.

2. Dana jest prosta $y = 4x - 3$.

Odpowiedź: $(0, -3)$

Na osi Oy x=0. Druga współrzędna jest wyrazem wolnym, z jego znakiem.

3. Rozwiązywano $4x + 3 = 0$.

Odpowiedź: $x = -\frac{3}{4}$

Po przeniesieniu wyrazu wolnego mamy $4x = -3$.

Grupa B

1. Wyznaczono nachylenie przez $(0, 1), (2, 11)$.

Odpowiedź: $a = 5$

Należy dzielić zmianę y przez zmianę x, a nie odwrotnie.

2. Dana jest prosta $y = 5x - 4$.

Odpowiedź: $(0, -4)$

Na osi Oy x=0. Druga współrzędna jest wyrazem wolnym, z jego znakiem.

3. Rozwiązywano $5x + 4 = 0$.

Odpowiedź: $x = -\frac{4}{5}$

Po przeniesieniu wyrazu wolnego mamy $5x = -4$.

5 / Matematyka w świecie

1. Taksówka w modelu pobiera 7 zł opłaty początkowej i 4 zł za kilometr. Zapisz koszt $K(x)$ oraz oblicz $K(4)$.

Odpowiedź: $K(x) = 4x + 7;\ K(4) = 23$

Stała opłata jest wyrazem wolnym, a koszt kilometra współczynnikiem przy x. Podstawienie x=4 daje $4 \cdot 4 + 7 = 23$.

2. Firma modeluje koszt $K(x) = 4x + 7$ zł i przychód $R(x) = 6x$ zł. Wyznacz liczbę sztuk x, od której przychód przewyższa koszt.

Odpowiedź: $x > \frac{7}{2}$

Porównujemy $(6)x > 4x + 7$. Odejmujemy $4x$: $2x > 7$, więc $x > \frac{7}{2}$; liczbę sztuk wybieramy całkowitą.

3. W uproszczonym modelu temperatura próbki wynosi $T(t) = 4t + 7$ °C, gdzie t to minuty. Kiedy osiągnie 27 °C?

Odpowiedź: $t = 5$ min

Rozwiązujemy $4t + 7 = 27$. Odejmujemy 7 i dzielimy przez 4: t=5.

4. Odtwórz model $f(x) = ax + b$ z raportu: $f(2) = 15$ oraz $f(5) = 27$. Wyznacz a i b.

Odpowiedź: $a = 4,\ b = 7$

Odejmujemy równania: $3a = 12$, więc a=4. Następnie $b = 15 - 2 \cdot 4 = 7$.