Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Obwód trójkąta równoramiennego

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Niech a oznacza długość każdej przyprostokątnej. Twierdzenie Pitagorasa daje $2a^2 = 8^2$, więc $a = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$. Obwód jest sumą dwóch przyprostokątnych i przeciwprostokątnej: $2 \cdot 4\sqrt{2} + 8 = 8\sqrt{2} + 8 = 8(\sqrt{2} + 1)$. Odpowiedź: C.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego ma długość 20. Oblicz obwód w najprostszej postaci.

Odpowiedź: $20(1 + \sqrt{2})$

Każda przyprostokątna ma długość $20/\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$. Obwód to $20 + 20\sqrt{2}$.

2. Obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego wynosi $10(2 + \sqrt{2})$. Wyznacz boki.

Odpowiedź: $10,\ 10,\ 10\sqrt{2}$

$a(2 + \sqrt{2}) = 10(2 + \sqrt{2})$, więc $a = 10$ i $c = a\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

3. Pole trójkąta prostokątnego równoramiennego wynosi 50. Oblicz obwód.

Odpowiedź: $10(2 + \sqrt{2})$

$a^2/2 = 50$, zatem $a = 10$. Przeciwprostokątna ma długość $10\sqrt{2}$, więc obwód to $10(2 + \sqrt{2})$.

4. Przeciwprostokątna ma długość 25, a suma przyprostokątnych wynosi 35. Oblicz pole bez wyznaczania boków.

Odpowiedź: 150

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, więc $2ab = 1225 - 625 = 600$. Pole $ab/2 = 150$.

5. Wykaż, że suma przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej c nie przekracza $c\sqrt{2}$. Kiedy jest równość?

Odpowiedź: $a + b \leq c\sqrt{2};\ a = b$

$(a - b)^2 \geq 0$ daje $2ab \leq a^2 + b^2 = c^2$. Stąd $(a + b)^2 = c^2 + 2ab \leq 2c^2$. Dodatniość boków pozwala spierwiastkować. Równość zachodzi dokładnie dla $a = b$.

6. Wyznacz wszystkie trójkąty prostokątne o obwodzie 60 i przeciwprostokątnej 25. Uzasadnij jednoznaczność.

Odpowiedź: $15,\ 20,\ 25$

$a + b = 35$ i $a^2 + b^2 = 625$, zatem $ab = 300$. Boki są pierwiastkami $t^2 - 35t + 300 = 0$, czyli $(t - 15)(t - 20) = 0$. Zamiana kolejności przyprostokątnych nie daje nowego trójkąta.

2 / Małe kroki

1. Trójkąt prostokątny równoramienny ma przyprostokątną 5. Oblicz przeciwprostokątną.

Odpowiedź: $5\sqrt{2}$

$c^2 = 2 \cdot 5^2$, więc $c = 5\sqrt{2}$.

2. Trójkąt prostokątny równoramienny ma przeciwprostokątną 10. Oblicz długość przyprostokątnej.

Odpowiedź: $5\sqrt{2}$

$2a^2 = 100$, stąd $a^2 = 50$ i $a = 5\sqrt{2}$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego ma 5. Podaj przeciwprostokątną.

Odpowiedź: $5\sqrt{2}$

$c = a\sqrt{2}$.

2. Taki trójkąt ma przyprostokątną 10. Oblicz pole.

Odpowiedź: 50

$P = 10^2/2 = 50$.

3. Podaj miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego równoramiennego.

Odpowiedź: $45°, 45°$

Są równe i sumują się do $90°$.

4. Uprość $\sqrt{50}$.

Odpowiedź: $5\sqrt{2}$

$\sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$.

Grupa B

1. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego ma 6. Podaj przeciwprostokątną.

Odpowiedź: $6\sqrt{2}$

$c = a\sqrt{2}$.

2. Taki trójkąt ma przyprostokątną 12. Oblicz pole.

Odpowiedź: 72

$P = 12^2/2 = 72$.

3. Podaj miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego równoramiennego.

Odpowiedź: $45°, 45°$

Są równe i sumują się do $90°$.

4. Uprość $\sqrt{72}$.

Odpowiedź: $6\sqrt{2}$

$\sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$.

Grupa C

1. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego ma 7. Podaj przeciwprostokątną.

Odpowiedź: $7\sqrt{2}$

$c = a\sqrt{2}$.

2. Taki trójkąt ma przyprostokątną 14. Oblicz pole.

Odpowiedź: 98

$P = 14^2/2 = 98$.

3. Podaj miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego równoramiennego.

Odpowiedź: $45°, 45°$

Są równe i sumują się do $90°$.

4. Uprość $\sqrt{98}$.

Odpowiedź: $7\sqrt{2}$

$\sqrt{49 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$.

Grupa D

1. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego ma 8. Podaj przeciwprostokątną.

Odpowiedź: $8\sqrt{2}$

$c = a\sqrt{2}$.

2. Taki trójkąt ma przyprostokątną 16. Oblicz pole.

Odpowiedź: 128

$P = 16^2/2 = 128$.

3. Podaj miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego równoramiennego.

Odpowiedź: $45°, 45°$

Są równe i sumują się do $90°$.

4. Uprość $\sqrt{128}$.

Odpowiedź: $8\sqrt{2}$

$\sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Trójkąt prostokątny równoramienny ma przyprostokątne 5.

Odpowiedź: $5\sqrt{2}$

Przeciwprostokątna to pierwiastek z sumy kwadratów przyprostokątnych.

2. Przeciwprostokątna takiego trójkąta ma długość 10.

Odpowiedź: $5\sqrt{2}$

Nie dzielimy przez 2, lecz przez pierwiastek z 2.

3. Przyprostokątne takiego trójkąta mają długość 5.

Odpowiedź: $\frac{25}{2}$

Pole to połowa iloczynu przyprostokątnych.

Grupa B

1. Trójkąt prostokątny równoramienny ma przyprostokątne 6.

Odpowiedź: $6\sqrt{2}$

Przeciwprostokątna to pierwiastek z sumy kwadratów przyprostokątnych.

2. Przeciwprostokątna takiego trójkąta ma długość 12.

Odpowiedź: $6\sqrt{2}$

Nie dzielimy przez 2, lecz przez pierwiastek z 2.

3. Przyprostokątne takiego trójkąta mają długość 6.

Odpowiedź: 18

Pole to połowa iloczynu przyprostokątnych.

5 / Matematyka w świecie

1. Drabina długości 25 m stoi podstawą 15 m od pionowej ściany. Na jaką wysokość sięga?

Odpowiedź: 20 m

Ściana i podłoże tworzą kąt prosty. $h = \sqrt{625 - 225} = 20$ m.

2. Wspornik jest przekątną prostokątnej ramy o bokach 15 i 20 dm. Jaka jest łączna długość dwóch takich wsporników?

Odpowiedź: 50 dm

Jeden ma długość 25 dm z Pitagorasa; dwa mają 50 dm.

3. W modelu doświadczenia ruch poziomy ma długość 15 cm, a prostopadły pionowy 20 cm. Oblicz odległość końca toru od początku.

Odpowiedź: 25 cm

Prostopadłe przemieszczenia tworzą przyprostokątne. Wypadkowa odległość to $\sqrt{225 + 400} = 25$ cm.

4. Rama ma przekątną 25 dm i bok 15 dm. Odtwórz drugi bok oraz pole ramy.

Odpowiedź: 20 dm; 300 dm^2

Drugi bok: $\sqrt{625 - 225} = 20$. Pole: $15 \cdot 20 = 300$.