Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Kąty wpisane w okrąg

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Kąty DBC i DAC są wpisane i oparte na tym samym łuku DC, więc mają tę samą miarę β. Kąt ADC jest oparty na średnicy AC, zatem ma 90 stopni. W trójkącie ADC pozostałe kąty mają razem $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Są to właśnie kąty o miarach β i γ. Zatem ich suma wynosi 90 stopni. Odpowiedź: B.

Odpowiedź: B

1 / Od schematu do wyzwania

1. Punkty A,B,C,D leżą na okręgu. C i D leżą na tym samym łuku AB. Kąt ACB ma 28°. Oblicz ADB i mniejszy kąt AOB.

Odpowiedź: $28^\circ;\ 56^\circ$

Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe. Środkowy na tym łuku jest dwa razy większy.

2. AB jest średnicą, C leży na okręgu, a kąt CAB ma 28°. Oblicz kąt ABC.

Odpowiedź: 62°

$\angle ACB = 90^\circ$. Z sumy kątów $\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$.

3. W czworokącie ABCD wpisanym w okrąg kąt A ma 103°, a kąt B ma 73°. Oblicz C i D.

Odpowiedź: $77^\circ;\ 107^\circ$

Kąty przeciwległe czworokąta wpisanego sumują się do 180 stopni. Odejmujemy od 180 podane kąty.

4. Cięciwy AB i CD przecinają się wewnątrz okręgu w P. Łuki AC i BD niezawierające pozostałych końców mają 56° i 76°. Oblicz kąt APC.

Odpowiedź: 66°

Kąt między cięciwami jest połową sumy miar wskazanych łuków: $(56 + 76)/2 = 66^\circ$. Można to uzyskać z sumy kątów trójkąta i twierdzenia o kącie wpisanym.

5. Wykaż, że suma miar przeciwległych kątów dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg wynosi 180°.

Odpowiedź: 180°

Przeciwległe kąty są oparte na dwóch łukach, które razem tworzą cały okrąg. Suma ich miar jest połową 360°, czyli 180°.

6. Trójkąt ABC jest równoboczny, P leży na krótszym łuku BC jego okręgu opisanego. Wykaż $PA = PB + PC$.

Odpowiedź: $PA = PB + PC$

Punkty tworzą w kolejności A,B,P,C czworokąt wpisany. Twierdzenie Ptolemeusza daje $AP \cdot BC = AB \cdot PC + AC \cdot BP$. Wszystkie boki trójkąta ABC są równe dodatniej liczbie a. Dzielimy równość przez a i otrzymujemy tezę.

2 / Małe kroki

1. Kąt środkowy oparty na krótszym łuku ma 56°. Ile ma kąt wpisany oparty na tym samym łuku?

Odpowiedź: 28°

Kąt wpisany ma połowę miary kąta środkowego.

2. Odcinek AB jest średnicą okręgu, a C leży na okręgu poza A i B. Podaj miarę kąta ACB.

Odpowiedź: 90°

Kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Wpisany ma 28°. Ile ma środkowy na tym samym łuku?

Odpowiedź: 56°

Mnożymy miarę wpisanego przez 2.

2. Środkowy ma 66°. Ile ma wpisany na tym łuku?

Odpowiedź: 33°

Dzielimy miarę środkowego przez 2.

3. Jaki kąt wpisany jest oparty na średnicy?

Odpowiedź: 90°

Połowa kąta półpełnego to 90 stopni.

4. Kąt czworokąta wpisanego ma 110°. Ile ma przeciwległy?

Odpowiedź: 70°

Od 180 stopni odejmujemy podany kąt.

Grupa B

1. Wpisany ma 29°. Ile ma środkowy na tym samym łuku?

Odpowiedź: 58°

Mnożymy miarę wpisanego przez 2.

2. Środkowy ma 68°. Ile ma wpisany na tym łuku?

Odpowiedź: 34°

Dzielimy miarę środkowego przez 2.

3. Jaki kąt wpisany jest oparty na średnicy?

Odpowiedź: 90°

Połowa kąta półpełnego to 90 stopni.

4. Kąt czworokąta wpisanego ma 111°. Ile ma przeciwległy?

Odpowiedź: 69°

Od 180 stopni odejmujemy podany kąt.

Grupa C

1. Wpisany ma 30°. Ile ma środkowy na tym samym łuku?

Odpowiedź: 60°

Mnożymy miarę wpisanego przez 2.

2. Środkowy ma 70°. Ile ma wpisany na tym łuku?

Odpowiedź: 35°

Dzielimy miarę środkowego przez 2.

3. Jaki kąt wpisany jest oparty na średnicy?

Odpowiedź: 90°

Połowa kąta półpełnego to 90 stopni.

4. Kąt czworokąta wpisanego ma 112°. Ile ma przeciwległy?

Odpowiedź: 68°

Od 180 stopni odejmujemy podany kąt.

Grupa D

1. Wpisany ma 31°. Ile ma środkowy na tym samym łuku?

Odpowiedź: 62°

Mnożymy miarę wpisanego przez 2.

2. Środkowy ma 72°. Ile ma wpisany na tym łuku?

Odpowiedź: 36°

Dzielimy miarę środkowego przez 2.

3. Jaki kąt wpisany jest oparty na średnicy?

Odpowiedź: 90°

Połowa kąta półpełnego to 90 stopni.

4. Kąt czworokąta wpisanego ma 113°. Ile ma przeciwległy?

Odpowiedź: 67°

Od 180 stopni odejmujemy podany kąt.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Kąt wpisany ma $28°$.

Odpowiedź: $56°$

Środkowy jest dwa razy większy od wpisanego, nie dwa razy mniejszy.

2. AB jest średnicą, C leży na okręgu poza A i B.

Odpowiedź: $90°$

Średnicy odpowiada łuk 180 stopni; kąt wpisany ma połowę tej miary.

3. Kąt A czworokąta wpisanego ma $100°$.

Odpowiedź: $80°$

Kąty przeciwległe są dopełniające do 180 stopni, nie muszą być równe.

Grupa B

1. Kąt wpisany ma $29°$.

Odpowiedź: $58°$

Środkowy jest dwa razy większy od wpisanego, nie dwa razy mniejszy.

2. AB jest średnicą, C leży na okręgu poza A i B.

Odpowiedź: $90°$

Średnicy odpowiada łuk 180 stopni; kąt wpisany ma połowę tej miary.

3. Kąt A czworokąta wpisanego ma $101°$.

Odpowiedź: $79°$

Kąty przeciwległe są dopełniające do 180 stopni, nie muszą być równe.

5 / Matematyka w świecie

1. Na planie okrągłej areny kamera O widzi łuk AB pod kątem środkowym $56°$. Jaki kąt widzi obserwator C na przeciwległym łuku okręgu?

Odpowiedź: $28°$

Kąt ACB jest wpisany i oparty na tym samym łuku co AOB, więc ma połowę jego miary.

2. Dwa słupki A,B są końcami średnicy okrągłej ekspozycji. Trzeci słupek C stoi na jej obwodzie. Jaki kąt muszą tworzyć podpory CA i CB?

Odpowiedź: $90°$

Jest to kąt wpisany oparty na średnicy.

3. W płaskim modelu obserwacji trzy punkty A,B,C leżą na okręgu, a środkowy kąt AOB wynosi $56°$. C leży na większym łuku AB. Oblicz kąt ACB.

Odpowiedź: $28°$

Model korzysta z twierdzenia o kącie wpisanym: dzielimy podaną miarę przez 2.

4. Obserwator na obwodzie okręgu widzi krótszy łuk pod kątem $28°$. Odtwórz miarę środkową tego łuku.

Odpowiedź: $56°$

Odwracamy zależność: miara środkowa jest dwa razy większa od wpisanej.