Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Tożsamość trygonometryczna

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Przenosimy oba kwadraty funkcji na lewą stronę i korzystamy z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Jedynki po obu stronach redukują się, pozostawiając $1\sin\alpha=1\cos\alpha$. Kąt jest ostry, zatem jego cosinus jest dodatni i możemy przez niego podzielić. Stąd $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{1}=1$. Odpowiedź: C.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. Kąt rozwarty ma sinus $3/5$. Oblicz $5\sin\alpha/\tan\alpha$.

Odpowiedź: -4

$\sin\alpha/\tan\alpha=\cos\alpha=-4/5$. Mnożenie przez 5 daje -4.

2. Kąt ostry spełnia $\sin\alpha=5/13$. Oblicz $\tan\alpha+1/\tan\alpha$.

Odpowiedź: $\frac{169}{60}$

Cosinus wynosi $12/13$, więc tangens to $5/12$. Suma $5/12+12/5=(25+144)/60=169/60$.

3. Kąt ostry spełnia $5\sin\alpha=6\cos\alpha$. Oblicz tangens i kwadrat sinusa.

Odpowiedź: $\frac{6}{5}$; $\frac{36}{61}$

Dzielimy przez dodatni cosinus: $\tan\alpha=(6)/5$. Z jedynki otrzymujemy $\sin^2\alpha=\tan^2\alpha/(1+\tan^2\alpha)$.

4. Kąt ostry spełnia $\sin\alpha+\cos\alpha=7/5$. Oblicz $\sin\alpha\cos\alpha$.

Odpowiedź: $\frac{12}{25}$

Podnosimy do kwadratu: $1+2\sin\alpha\cos\alpha=49/25$, więc iloczyn wynosi $12/25$.

5. Wykaż, że dla kąta ostrego $\sin\alpha+\cos\alpha\le\sqrt{2}$. Wskaż warunek równości.

Odpowiedź: $\alpha=45^\circ$

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\ge 0$ daje $2\sin\alpha\cos\alpha\le 1$. Kwadrat sumy jest więc nie większy od 2. Równość wymaga równych dodatnich sinusa i cosinusa, czyli kąta 45°.

6. Znajdź najmniejszą wartość $1/\sin^2\alpha+1/\cos^2\alpha$ dla $0<\alpha<90^\circ$. Uzasadnij i wskaż wszystkie przypadki równości.

Odpowiedź: $4;\ \alpha=45^\circ$

Suma to $1/(\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$. Z $(u-v)^2\ge 0$ dla $u=\sin^2\alpha, v=\cos^2\alpha$ oraz $u+v=1$ mamy $uv\le 1/4$. Stąd suma co najmniej 4. Równość: $u=v=1/2$, czyli tylko 45°.

2 / Małe kroki

1. Kąt ostry ma $\sin\alpha=3/5$. Oblicz $\cos\alpha$.

Odpowiedź: $\frac{4}{5}$

$\cos^2\alpha=1-9/25=16/25$. Dla kąta ostrego wybieramy dodatni pierwiastek.

2. Kąt rozwarty ma $\sin\alpha=3/5$. Oblicz $\tan\alpha$.

Odpowiedź: $-\frac{3}{4}$

Cosinus kąta rozwartego to $-4/5$. Tangens: $(3/5):(-4/5)=-3/4$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

Odpowiedź: 1

To jedynka trygonometryczna.

2. Podaj znak cosinusa kąta rozwartego.

Odpowiedź: Ujemny.

Punkt na okręgu jednostkowym ma wtedy ujemną pierwszą współrzędną.

3. Oblicz $\tan 45^\circ$.

Odpowiedź: 1

Sinus i cosinus kąta 45 stopni są równe.

4. Uprość $5\sin\alpha/\tan\alpha$ dla kąta ostrego.

Odpowiedź: $5\cos\alpha$

Podstawiamy $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ i skracamy niezerowy sinus.

Grupa B

1. Oblicz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

Odpowiedź: 1

To jedynka trygonometryczna.

2. Podaj znak cosinusa kąta rozwartego.

Odpowiedź: Ujemny.

Punkt na okręgu jednostkowym ma wtedy ujemną pierwszą współrzędną.

3. Oblicz $\tan 45^\circ$.

Odpowiedź: 1

Sinus i cosinus kąta 45 stopni są równe.

4. Uprość $6\sin\alpha/\tan\alpha$ dla kąta ostrego.

Odpowiedź: $6\cos\alpha$

Podstawiamy $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ i skracamy niezerowy sinus.

Grupa C

1. Oblicz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

Odpowiedź: 1

To jedynka trygonometryczna.

2. Podaj znak cosinusa kąta rozwartego.

Odpowiedź: Ujemny.

Punkt na okręgu jednostkowym ma wtedy ujemną pierwszą współrzędną.

3. Oblicz $\tan 45^\circ$.

Odpowiedź: 1

Sinus i cosinus kąta 45 stopni są równe.

4. Uprość $7\sin\alpha/\tan\alpha$ dla kąta ostrego.

Odpowiedź: $7\cos\alpha$

Podstawiamy $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ i skracamy niezerowy sinus.

Grupa D

1. Oblicz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

Odpowiedź: 1

To jedynka trygonometryczna.

2. Podaj znak cosinusa kąta rozwartego.

Odpowiedź: Ujemny.

Punkt na okręgu jednostkowym ma wtedy ujemną pierwszą współrzędną.

3. Oblicz $\tan 45^\circ$.

Odpowiedź: 1

Sinus i cosinus kąta 45 stopni są równe.

4. Uprość $8\sin\alpha/\tan\alpha$ dla kąta ostrego.

Odpowiedź: $8\cos\alpha$

Podstawiamy $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ i skracamy niezerowy sinus.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Kąt rozwarty ma sinus $3/5$.

Odpowiedź: $-\frac{4}{5}$

Wartość bezwzględna jest poprawna, ale dla kąta rozwartego cosinus jest ujemny.

2. Kąt ostry ma tangens $3/4$.

Odpowiedź: $\frac{3}{5}$

Można przyjąć przyprostokątne 3 i 4. Przeciwprostokątna to 5, a sinus wynosi 3/5.

3. Uczeń korzysta z jedynki trygonometrycznej.

Odpowiedź: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

To kwadraty wartości, a nie same wartości, sumują się do 1.

Grupa B

1. Kąt rozwarty ma sinus $5/13$.

Odpowiedź: $-\frac{12}{13}$

Z jedynki wyznaczamy wartość bezwzględną cosinusa, a znak jest ujemny dla kąta rozwartego.

2. Kąt ostry ma tangens $5/12$.

Odpowiedź: $\frac{5}{13}$

Przyprostokątne w proporcji 5:12 dają przeciwprostokątną 13. Sinus to 5/13.

3. Uczeń przekształca jedynkę trygonometryczną.

Odpowiedź: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

W jedynce występują kwadraty obu funkcji.

5 / Matematyka w świecie

1. Rampa długości 25 m wznosi się pod kątem o sinusie $3/5$. Oblicz jej wysokość.

Odpowiedź: 15 m

$h = 25 \cdot 3/5 = 15$ m.

2. Element trójkątnej podpory ma rzut poziomy 20 dm i kąt nachylenia o tangensie $3/4$. Ile dm materiału wymaga pionowy element?

Odpowiedź: 15 dm

$h = 20 \cdot 3/4 = 15$ dm.

3. W modelu ruchu wektor jednostkowy tworzy kąt rozwarty o sinusie $5/13$. Wyznacz jego składową poziomą.

Odpowiedź: $-\frac{12}{13}$

Składowa pozioma to cosinus. Z jedynki otrzymujemy jego kwadrat 144/169 i wybieramy ujemny znak.

4. Miernik pokazuje składowe jednostkowego kierunku: poziomą $-4/5$ i pionową $3/5$. Odtwórz tangens kąta i określ, czy kąt jest ostry, czy rozwarty.

Odpowiedź: $-\frac{3}{4}$; rozwarty.

Tangens to $(3/5) : (-4/5) = -3/4$. Dodatni sinus i ujemny cosinus oznaczają kąt między 90 a 180 stopni.