Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Iloraz ciągu geometrycznego

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Trzeci wyraz zapisujemy jako $2(x+4)$. Ponieważ drugi wyraz jest dodatni, możemy podzielić trzeci przez drugi: $q = \frac{2(x+4)}{x+4} = 2$. Dla pewności sprawdzamy zgodność także pierwszej pary: $\frac{x+4}{x} = 2$ daje $x = 4$. Ta liczba i wszystkie trzy wyrazy są dodatnie, więc warunek istnienia ciągu jest spełniony. Odpowiedź: C.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. $a_1 = 5, q = -3$. Oblicz a_5 i określ znak a_6.

Odpowiedź: $a_5 = 405$; a_6 ujemny.

$a_5 = 5(-3)^4 = 405$. Potęga ilorazu przy a_6 ma nieparzysty wykładnik 5.

2. $a_2 = 15, a_4 = 135$ oraz q>0. Wyznacz q i a_1.

Odpowiedź: $q = 3, a_1 = 5$

Iloraz $a_4/a_2 = q^2 = 9$, więc q=3. Następnie $a_1 = a_2/q = 5$.

3. W dodatnim ciągu geometrycznym $a_3 = 5$. Oblicz iloczyn $a_1a_2a_3a_4a_5$.

Odpowiedź: 3125

Wyrazy symetryczne spełniają $a_1a_5 = a_3^2$ i $a_2a_4 = a_3^2$. Cały iloczyn to $a_3^5 = 3125$.

4. $a_1 = 5, q = 2$. Wyznacz n, jeśli $a_n = 160$.

Odpowiedź: $n = 6$

$5 \cdot 2^{n-1} = 160$, więc $2^{n-1} = 32 = 2^5$ i n=6.

5. Wykaż, że dla trzech dodatnich kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego zachodzi $a_1 + a_3 \geq 2a_2$. Ustal równość.

Odpowiedź: Równość dokładnie dla q=1.

$a_1 + a_3 - 2a_2 = a_1(1 + q^2 - 2q) = a_1(q-1)^2 \geq 0$. Ponieważ $a_1 > 0$, równość wymaga q=1.

6. Znajdź wszystkie rosnące trójki dodatnich liczb całkowitych tworzących ciąg geometryczny, którego środkowy wyraz wynosi 9.

Odpowiedź: $(1, 9, 81)$, $(3, 9, 27)$

Dla trójki (u,9,w) mamy $uw = 81$. Wybieramy wszystkie dodatnie dzielniki u liczby 81 mniejsze od 9; wtedy $w = 81/u > 9$. To daje dokładnie wypisane trójki.

2 / Małe kroki

1. $a_1 = 5, q = 2$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 20

$a_3 = 5 \cdot 2^2 = 20$.

2. $a_1 = 5, a_2 = 15$. Podaj iloraz.

Odpowiedź: 3

$q = 15/5 = 3$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $a_1 = 5, q = 2$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 10

$a_2 = a_1q = 10$.

2. Początek: $5, 10, 20$. Podaj iloraz.

Odpowiedź: 2

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 5

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

4. $a_1 = 5, q = -1$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 5

Trzeci wyraz to a_1 razy $(-1)^2$, czyli a_1.

Grupa B

1. $a_1 = 6, q = 3$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 18

$a_2 = a_1 q = 18$.

2. Początek: $6, 18, 54$. Podaj iloraz.

Odpowiedź: 3

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 6

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

4. $a_1 = 6, q = -1$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 6

Trzeci wyraz to a_1 razy $(-1)^2$, czyli a_1.

Grupa C

1. $a_1 = 7, q = 4$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 28

$a_2 = a_1 q = 28$.

2. Początek: $7, 28, 112$. Podaj iloraz.

Odpowiedź: 4

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. $a_n = 7 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 7

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

4. $a_1 = 7, q = -1$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 7

Trzeci wyraz to a_1 razy $(-1)^2$, czyli a_1.

Grupa D

1. $a_1 = 8, q = 5$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 40

$a_2 = a_1 q = 40$.

2. Początek: $8, 40, 200$. Podaj iloraz.

Odpowiedź: 5

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. $a_n = 8 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 8

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

4. $a_1 = 8, q = -1$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 8

Trzeci wyraz to a_1 razy $(-1)^2$, czyli a_1.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $a_1 = 5, q = 2$. Uczeń liczy a_4.

Odpowiedź: $a_4 = 40$

Od a_1 do a_4 wykonujemy trzy mnożenia przez q, więc wykładnik wynosi 3.

2. $a_1 = 5, a_2 = 10$. Wyznaczono iloraz.

Odpowiedź: $q = 2$

Odwrócono iloraz. Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy, nie pierwszy przez drugi.

3. $a_1 = 5, q = -2$. Obliczono a_2.

Odpowiedź: $a_2 = -10$

Przy mnożeniu dodatniego wyrazu przez ujemny iloraz wynik jest ujemny.

Grupa B

1. $a_1 = 6, q = 3$. Uczeń liczy a_4.

Odpowiedź: $a_4 = 162$

Od a_1 do a_4 wykonujemy trzy mnożenia przez q, więc wykładnik wynosi 3.

2. $a_1 = 6, a_2 = 18$. Wyznaczono iloraz.

Odpowiedź: $q = 3$

Odwrócono iloraz. Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy, nie pierwszy przez drugi.

3. $a_1 = 6, q = -2$. Obliczono a_2.

Odpowiedź: $a_2 = -12$

Przy mnożeniu dodatniego wyrazu przez ujemny iloraz wynik jest ujemny.

5 / Matematyka w świecie

1. Warstwy konstrukcji mają kolejno $7, 14, 28, \ldots$ elementów. Ile ma piąta warstwa w tym modelu?

Odpowiedź: 112

$a_5 = 7 \cdot 2^4 = 112$.

2. Umowny kapitał 700 zł co okres mnoży się przez 2. Jaki jest po trzech okresach? Pomijamy podatki.

Odpowiedź: 5600 zł

Wykonujemy trzy mnożenia: $700 \cdot 2^3 = 5600$.

3. W uproszczonym modelu populacja zaczyna od 7 jednostek i podwaja się co etap. Ile będzie po czterech etapach?

Odpowiedź: 112

Po czterech mnożeniach liczebność wynosi $7 \cdot 2^4 = 112$.

4. Dodatni ciąg geometryczny ma $a_1 = 7$ i $a_3 = 63$. Odtwórz dodatni iloraz q.

Odpowiedź: 3

$a_3 = a_1 q^2$ daje $q^2=9$. Przy $q>0$ otrzymujemy $q=3$.