Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Wyznaczanie ciągu arytmetycznego

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Niech a oznacza pierwszy wyraz, a r różnicę. Ze wzoru na sumę mamy $\frac{10}{2}(2a+9r)=90$, czyli $2a+9r=18$. Wyrazy ze średniej to a, a+6r i a+7r. Warunek średniej daje $\frac{a+(a+6r)+(a+7r)}{3}=10$, a po pomnożeniu przez 3: $3a+13r=30$. Mnożymy pierwsze uproszczone równanie przez 3, drugie przez 2 i odejmujemy: $r=54-60=-6$. Podstawiamy do $2a+9r=18$ i otrzymujemy $a=36$. Sprawdzenie: suma i średnia wyliczone z tych wartości odtwarzają dane z treści.

Odpowiedź: $a_1=36,\ r=-6$

1 / Od schematu do wyzwania

1. W ciągu arytmetycznym $a_2=10, a_7=25$. Wyznacz a_1 i różnicę.

Odpowiedź: $a_1=7, d=3$

Odejmujemy: $5d=15$. Pierwszy wyraz to $a_2-d=7$.

2. $a_1=7, d=3$. Oblicz sumę dziesięciu pierwszych wyrazów.

Odpowiedź: 205

$a_{10}=34$. Suma $10(7+34)/2=205$.

3. $a_n=7+(n-1)3$. Którym wyrazem jest liczba 31?

Odpowiedź: $n=9$

Równanie $7+(n-1)3=31$ daje n-1=8.

4. Suma pierwszych n wyrazów ciągu $3,6,9,\ldots$ wynosi 45. Wyznacz naturalne n.

Odpowiedź: $n=5$

$dn(n+1)/2=45$, więc $n^2+n-30=0$. Pierwiastki to 5 i -6; tylko 5 jest naturalne.

5. Wykaż, że w dowolnym ciągu arytmetycznym suma pięciu kolejnych wyrazów jest pięciokrotnością środkowego.

Odpowiedź: Suma wynosi 5 razy środkowy wyraz.

Zapisujemy wyrazy jako b-2 d,b-d,b,b+d,b+2 d. Po dodaniu składniki zawierające d znoszą się i zostaje 5 b.

6. Znajdź wszystkie rosnące ciągi arytmetyczne dodatnich liczb całkowitych, które mają co najmniej trzy wyrazy i sumę 23. Podaj pierwszy wyraz, różnicę i długość.

Odpowiedź: (a_1,d,n):

Ze wzoru na sumę: $2\cdot 23=n(2a_1+(n-1)d)$. Ponieważ $a_1, d\geq 1$, musi być $n(n+1)/2\leq 23$. Dla każdej tak ograniczonej długości sprawdzamy dodatnie całkowite d i a_1; otrzymujemy dokładnie trójki .

2 / Małe kroki

1. $a_1=7, d=3$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 13

Trzeci wyraz jest o dwie różnice większy od pierwszego.

2. Oblicz różnicę ciągu zaczynającego się od $7, 10, 13$.

Odpowiedź: 3

Różnica dwóch kolejnych wyrazów jest stała.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $a_1=7, d=2$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 9

Dodajemy różnicę: $a_2=7+2=9$.

2. Początek ciągu: $7, 9, 11$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 2n + 7$. Oblicz a1.

Odpowiedź: 9

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -2 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa B

1. $a_1 = 8, d = 3$. Oblicz a2.

Odpowiedź: 11

Dodajemy różnicę: $a_2 = 8 + 3 = 11$.

2. Początek ciągu: $8, 11, 14$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 3

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 3n + 8$. Oblicz a1.

Odpowiedź: 11

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -3 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa C

1. $a_1 = 9, d = 4$. Oblicz a2.

Odpowiedź: 13

Dodajemy różnicę: $a_2 = 9 + 4 = 13$.

2. Początek ciągu: $9, 13, 17$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 4

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 4n + 9$. Oblicz a1.

Odpowiedź: 13

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -4 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa D

1. $a_1 = 10, d = 5$. Oblicz a2.

Odpowiedź: 15

Dodajemy różnicę: $a_2 = 10 + 5 = 15$.

2. Początek ciągu: $10, 15, 20$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 5

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 5n + 10$. Oblicz a1.

Odpowiedź: 15

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -5 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $a_1 = 7, d = 2$. Uczeń oblicza a_5.

Odpowiedź: $a_5 = 15$

Od pierwszego do piątego wyrazu są cztery, nie pięć przyrostów.

2. $a_1 = 7, a_5 = 15$. Uczeń wyznacza różnicę.

Odpowiedź: $d = 2$

Różnicę wyrazów należy podzielić przez różnicę indeksów, czyli 4.

3. $a_1 = 7, a_4 = 13$. Obliczono S_4.

Odpowiedź: $S_4 = 40$

We wzorze $n(a_1+a_n)/2$ pominięto dzielenie przez 2.

Grupa B

1. $a_1 = 8, d = 3$. Uczeń oblicza a_5.

Odpowiedź: $a_5 = 20$

Od pierwszego do piątego wyrazu są cztery, nie pięć przyrostów.

2. $a_1 = 8, a_5 = 20$. Uczeń wyznacza różnicę.

Odpowiedź: $d = 3$

Różnicę wyrazów należy podzielić przez różnicę indeksów, czyli 4.

3. $a_1 = 8, a_4 = 17$. Obliczono S_4.

Odpowiedź: $S_4 = 50$

We wzorze $n(a_1+a_n)/2$ pominięto dzielenie przez 2.

5 / Matematyka w świecie

1. W pierwszym rzędzie jest 9 miejsc, a w każdym następnym o 3 więcej. Ile miejsc ma dziesiąty rząd?

Odpowiedź: 36

$a_{10} = 9 + 9 \cdot 3 = 36.$

2. W symulacji odkładasz 9 zł pierwszego dnia i codziennie o 3 zł więcej. Ile odłożysz przez 5 dni?

Odpowiedź: 75 zł

Piąta wpłata to 21. Suma $5(9 + 21)/2 = 75$.

3. W modelu pomiarowym odczyty co minutę to $9, 12, 15, \ldots$ mm. Przy stałym przyroście jaki będzie szósty odczyt?

Odpowiedź: 24 mm

Szósty odczyt jest o pięć różnic większy od pierwszego: $9 + 5 \cdot 3 = 24$.

4. Raport podaje $a_2 = 12$ oraz $a_5 = 21$ ciągu arytmetycznego. Odtwórz a_1 i d.

Odpowiedź: $a_1 = 9,\ d = 3$

Odejmujemy wyrazy: $3d = 9$. Następnie od a_2 odejmujemy jedną różnicę.