Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Wzór i monotoniczność ciągu

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Wstawiamy $n = 3$ do wzoru: $a_3 = 32 \cdot (\frac{1}{2})^{3-5} = 128$. Odpowiedź w 14.1: C. Iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest stały i równy $q = \frac{1}{2}$. Wszystkie wyrazy są dodatnie. Iloraz leży pomiędzy 0 a 1, więc ciąg jest malejący. Nie jest arytmetyczny, ponieważ różnice kolejnych wyrazów nie są stałe: przy ilorazie różnym od 1 zmieniają się wraz z wyrazami. Odpowiedź w 14.2: D.

Odpowiedź: C; D

1 / Od schematu do wyzwania

1. $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 1$. Oblicz a_4.

Odpowiedź: 31

$a_2 = 7, a_3 = 15, a_4 = 31$.

2. $a_n = (3+1)2^{n-1} - 1$. Oblicz a_1 i a_3.

Odpowiedź: $a_1 = 3, a_3 = 15$

Dla n=1 potęga wynosi 1, a dla n=3 wynosi 4.

3. $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 1$. Pokaż, że $b_n = a_n + 1$ jest ciągiem geometrycznym.

Odpowiedź: $b_1 = 4, q = 2$

$b_{n+1} = a_{n+1} + 1 = 2a_n + 2 = 2b_n$.

4. $a_n = (3+1)2^{n-1} - 1$. Wyznacz n, jeśli $a_n = 31$.

Odpowiedź: $n = 4$

Po dodaniu 1 i podzieleniu przez 4 dostajemy $2^{n-1} = 8 = 2^3$.

5. Wykaż bez wypisywania wszystkich wyrazów, że ciąg $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 1$ jest rosnący i od drugiego wyrazu ma tylko liczby nieparzyste.

Odpowiedź: Ciąg jest rosnący; $a_2, a_3, \ldots$ są nieparzyste.

Dodatniość wyrazów zachowuje się w rekurencji. Mamy $a_{n+1} - a_n = a_n + 1 > 0$. Ponadto $2a_n + 1$ jest nieparzyste dla każdego całkowitego a_n.

6. $a_1 = t, a_{n+1} = 2a_n + 1$, gdzie t jest dodatnią liczbą całkowitą. Wyznacz wszystkie pary (t,n), dla których $a_n = 2^6 - 1$.

Odpowiedź: $t = 2^j - 1,\ n = 7 - j,\ j = 1, \ldots, 6$

Ze wzoru $a_n = (t+1)2^{n-1} - 1$ dostajemy $(t+1)2^{n-1} = 2^6$. Zatem t+1 musi być potęgą 2: $t + 1 = 2^j$. Warunki $t \geq 1, n \geq 1$ dają $1 \leq j \leq 6$. Każda taka para spełnia rekurencję.

2 / Małe kroki

1. $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 3$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 6

Wstawiamy pierwszy wyraz do reguły i dodajemy 3.

2. $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 1$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 7

$a_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 5

Do a_1 dodajemy 2.

2. $a_n = 2n + 3$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 5

Wstawiamy n=1, nie n=0.

3. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 6

Wykładnik dla n=2 wynosi 1.

4. $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n$. Czy ciąg rośnie?

Odpowiedź: Tak.

Każdy dodatni wyraz mnożymy przez 2>1.

Grupa B

1. $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + 2$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 6

Do a_1 dodajemy 2.

2. $a_n = 2n + 4$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 6

Wstawiamy n=1, nie n=0.

3. $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 8

Wykładnik dla n=2 wynosi 1.

4. $a_1 = 4, a_{n+1} = 2a_n$. Czy ciąg rośnie?

Odpowiedź: Tak.

Każdy dodatni wyraz mnożymy przez 2>1.

Grupa C

1. $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + 2$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 7

Do a_1 dodajemy 2.

2. $a_n = 2n + 5$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 7

Wstawiamy n=1, nie n=0.

3. $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 10

Wykładnik dla n=2 wynosi 1.

4. $a_1 = 5, a_{n+1} = 2a_n$. Czy ciąg rośnie?

Odpowiedź: Tak.

Każdy dodatni wyraz mnożymy przez 2>1.

Grupa D

1. $a_1 = 6, a_{n+1} = a_n + 2$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 8

Do a_1 dodajemy 2.

2. $a_n = 2n + 6$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 8

Wstawiamy n=1, nie n=0.

3. $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 12

Wykładnik dla n=2 wynosi 1.

4. $a_1 = 6, a_{n+1} = 2a_n$. Czy ciąg rośnie?

Odpowiedź: Tak.

Każdy dodatni wyraz mnożymy przez 2>1.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 1$.

Odpowiedź: $a_2 = 7$

Pominięto dodawanie 1 po podwojeniu wyrazu.

2. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Odpowiedź: $a_1 = 3$

Wykładnik n-1 przy pierwszym wyrazie jest zerem.

3. $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2$.

Odpowiedź: $a_n = 3 + 2(n-1)$

Od pierwszego do n-tego wyrazu wykonujemy n-1, nie n przyrostów.

Grupa B

1. $a_1 = 4, a_{n+1} = 2a_n + 1$.

Odpowiedź: $a_2 = 9$

Pominięto dodawanie 1 po podwojeniu wyrazu.

2. $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$.

Odpowiedź: $a_1 = 4$

Wykładnik n-1 przy pierwszym wyrazie jest zerem.

3. $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + 2$.

Odpowiedź: $a_n = 4 + 2(n-1)$

Od pierwszego do n-tego wyrazu wykonujemy n-1, nie n przyrostów.

5 / Matematyka w świecie

1. Licznik automatu zaczyna od 3. Każdy etap podwaja stan i dodaje 1. Podaj stan po dwóch etapach.

Odpowiedź: 15

Kolejne stany to $2 \cdot 3 + 1 = 7$ i $2 \cdot 7 + 1 = 15$.

2. W symulacji saldo początkowe to 3 zł. Co etap podwaja się je i dopłaca 1 zł. Oblicz saldo po trzech etapach.

Odpowiedź: 31 zł

Trzykrotnie stosujemy regułę 2 x+1: otrzymujemy kolejno 7, 15, 31.

3. Umowny model liczebności to $u_1 = 3$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Ile wynosi u_4?

Odpowiedź: 31

$u_4 = 2(2(2 \cdot 3 + 1) + 1) + 1 = 31$.

4. Reguła pomiaru brzmi $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Raport podaje $u_2 = 7$. Odtwórz u_1 i u_3.

Odpowiedź: $u_1 = 3, u_3 = 15$

Z pierwszego równania $u_1 = (u_2 - 1)/2 = 3$. Następny wyraz to $2u_2 + 1 = 15$.