Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Odczytywanie własności funkcji z wykresu

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Najniższy punkt wykresu to $(1, -3)$ i należy on do wykresu. Największą wartość, 1, funkcja przyjmuje na poziomym odcinku. Odcinki pośrednie przyjmują wszystkie wartości pomiędzy nimi, więc zbiorem wartości jest $[-3, 1]$. Wykres przecina oś poziomą dla $x = -2$ oraz $x = 4$. Leży pod osią dokładnie pomiędzy tymi zerami, zatem wartości ujemne przyjmuje dla $x \in (-2, 4)$. Największą wartość przyjmuje dla $x \in (-5, -3]$. Lewy koniec jest wyłączony, a prawy włączony; otwarty punkt na prawym końcu całej dziedziny nie daje dodatkowego argumentu maksimum.

Odpowiedź: $[-3, 1]$; $(-2, 4)$; $(-5, -3]$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Dana jest $f(x) = x + 4$ dla $-2 \leq x < 0$ i $f(x) = 4 - x$ dla $0 \leq x \leq 3$. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości.

Odpowiedź: $D = [-2, 3],\ W = [1, 4]$

Argumenty obejmują od -2 do 3. Pierwsza część daje wartości $[2, 4)$, druga $[1, 4]$; ich suma to drugi z tych przedziałów.

2. Dana jest $f(x) = x + 4$ dla $-2 \leq x < 0$ i $f(x) = 4 - x$ dla $0 \leq x \leq 3$. Rozwiąż $f(x) = 3$.

Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$

Pierwszy wzór daje $x + 4 = 3$, czyli -1. Drugi daje $4 - x = 3$, czyli 1. Oba należą do właściwych części dziedziny.

3. Dana jest $f(x) = x + 4$ dla $-2 \leq x < 0$ i $f(x) = 4 - x$ dla $0 \leq x \leq 3$. Podaj największą wartość i wszystkie argumenty jej osiągania.

Odpowiedź: max $f = 4,\ x = 0$

W pierwszym przedziale wartości są mniejsze od 4, bo 0 jest wyłączone. Drugi wzór przyjmuje wartość 4 tylko w x=0.

4. Dana jest $f(x) = x + 4$ dla $-2 \leq x < 0$ i $f(x) = 4 - x$ dla $0 \leq x \leq 3$. Wyznacz zbiór $\{x : f(x) > 2\}$.

Odpowiedź: $(-2, 2)$

Pierwsza nierówność daje x>-2, zatem (-2,0). Druga daje x<2, czyli [0,2). Suma przedziałów to (-2,2).

5. $g(x) = |x - 4| + |x - (8)|$. Wyznacz minimum g i wszystkie argumenty, dla których jest osiągane.

Odpowiedź: min $g = 4,\ x \in [4, 8]$

Wyrażenie jest sumą odległości od 4 i 8. Między tymi punktami suma wynosi 4, a poza nimi jest większa.

6. Wyznacz, zależnie od m, liczbę rzeczywistych rozwiązań $|x - 4| + |x - (8)| = m$. Uzasadnij wszystkie przypadki.

Odpowiedź: 0 dla m<4; nieskończenie wiele dla m=4; 2 dla m>4.

Dla $x \leq 4$ lewa strona to $12 - 2x$, dla $4 \leq x \leq 8$ wynosi 4, a dla $x \geq 8$ jest równa $2x - 12$. Stąd opis trzech przypadków.

2 / Małe kroki

1. $f(x) = x + 4$ dla $x \in [-2, 2]$. Oblicz f(1).

Odpowiedź: 5

Podstawiamy argument 1 do podanego wzoru.

2. $f(x) = |x - 4|$. Podaj minimum i argument minimum.

Odpowiedź: $0,\ x = 4$

Wartość bezwzględna jest nieujemna, a zeruje się, gdy wyrażenie wewnątrz jest zerem.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $f(x) = |x - 4|$. Oblicz $f(4)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x) = x + 4$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 4

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-4, 3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x - 4| = 1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x = 3$ i $x = 5$.

Grupa B

1. $f(x) = |x - 5|$. Oblicz $f(5)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x) = x + 5$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 5

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-5, 3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x - 5| = 1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x = 4$ i $x = 6$.

Grupa C

1. $f(x) = |x - 6|$. Oblicz $f(6)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x) = x + 6$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 6

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-6, 3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x - 6| = 1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x = 5$ i $x = 7$.

Grupa D

1. $f(x) = |x - 7|$. Oblicz $f(7)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x) = x + 7$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 7

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-7, 3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x - 7| = 1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x = 6$ i $x = 8$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $f(x) = |x - 4|$. Uczeń szuka minimum.

Odpowiedź: min $f = 0$

Wartość bezwzględna nie może być ujemna. Minimum to 0.

2. Wykres ma dziedzinę $(-2, 3]$.

Odpowiedź: Nie należy.

Okrągły nawias przy -2 wyłącza ten argument.

3. Rozwiązano $|x - 4| = 2$.

Odpowiedź: $x \in \{2, 6\}$

Pominięto możliwość, że wyrażenie pod wartością bezwzględną wynosi -2.

Grupa B

1. $f(x) = |x - 5|$. Uczeń szuka minimum.

Odpowiedź: min $f = 0$

Wartość bezwzględna nie może być ujemna. Minimum to 0.

2. Wykres ma dziedzinę $(-2, 3]$.

Odpowiedź: Nie należy.

Okrągły nawias przy -2 wyłącza ten argument.

3. Rozwiązano $|x - 5| = 2$.

Odpowiedź: $x \in \{3, 7\}$

Pominięto możliwość, że wyrażenie pod wartością bezwzględną wynosi -2.

5 / Matematyka w świecie

1. Wędrówka jest opisana odległością od domu: $d(t) = t$ dla $0 \le t \le 6$, potem $d(t) = 2(6) - t$ aż do powrotu. Po jakim czasie nastąpi powrót?

Odpowiedź: 12 h

Drugi wzór zeruje się dla $t = 12$.

2. Taryfa wynosi 10 zł do 2 godzin włącznie i po 4 zł za każdą kolejną pełną godzinę. Oblicz koszt 5 godzin.

Odpowiedź: 22 zł

Za pierwsze dwie godziny płacimy 10 zł, a za trzy następne 12 zł; razem 22 zł.

3. W modelu temperatura $T(t) = 4 + |t - 6|$ °C dla $0 \le t \le 12$. Kiedy osiąga minimum?

Odpowiedź: $t = 6$

Dodana stała 4 nie zmienia argumentu minimum wartości bezwzględnej.

4. Model $d(x) = |x - p|$ opisuje odległość. Wiadomo, że $d(0) = 7$ i $p > 0$. Odtwórz p i wskaż punkt minimalnej odległości.

Odpowiedź: $p = 7,\ x = 7$

$|p| = 7$ i p>0, więc p=7. Odległość zeruje się w x=p.