Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Model zakupów i układ równań

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Zapisujemy równania zakupów: $8x+4y=82$ oraz $3x+9y=60$. Mnożymy pierwsze równanie przez 9, a drugie przez 4 i odejmujemy drugie od pierwszego. Wyrazy z y znikają: $(72-12)x=738-240$. Zatem $60x=498$ i $x=8{,}3$ zł. Dla sprawdzenia z dowolnego równania wyznaczamy $y=3{,}9$ zł i wstawiamy obie ceny do obu rachunków; otrzymujemy kwoty podane w treści.

Odpowiedź: 8,3 zł

1 / Od schematu do wyzwania

1. Rozwiąż $x+y=13$, $x-y=3$.

Odpowiedź: $x=8,\ y=5$

Dodajemy równania: $2x=16$, więc $x=8$. Z pierwszego $y=5$.

2. Ceny x,y spełniają $2x+y=17$ i $x+3y=26$. Oblicz obie ceny.

Odpowiedź: $x=5,\ y=7$

Z pierwszego $y=17-2x$. Po podstawieniu do drugiego $-5x=-25$, więc $x=5$ i $y=7$.

3. Sprzedano 15 biletów: normalne po 8 zł, ulgowe po 5 zł. Wpływ wyniósł 96 zł. Ile było ulgowych?

Odpowiedź: 8

Niech u oznacza liczbę ulgowych. $8(15-u)+5u=96$ daje $3u=24$, czyli $u=8$.

4. Zbadaj liczbę rozwiązań układu $x+y=5$, $x+my=5$ w zależności od m.

Odpowiedź: $m=1:\ \infty; \quad m\neq 1:\ (5,0)$

Odejmujemy równania: $(m-1)y=0$. Dla m≠1 musi być y=0 i x=5. Dla m=1 oba równania są jednakowe, więc każda para z prostej $x+y=5$ jest rozwiązaniem.

5. Ile dodatnich całkowitych par (x,y) spełnia $x+y=10$ i $x>y$? Uzasadnij.

Odpowiedź: 4

Z $y=10-x>0$ mamy $x\leq 9$. Warunek x>y daje x>5. Zatem x przyjmuje wartości od 6 do 9, których jest 4; każda wyznacza jedyne dodatnie y.

6. Znajdź wszystkie nieujemne całkowite pary (x,y) spełniające $2x+3y=31$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $\{(14,1),(11,3),(8,5),(5,7),(2,9)\}$

Prawa strona jest nieparzysta, więc y musi być nieparzyste. Piszemy $y=2k+1$ z całkowitym k≥0. Wtedy $x=14-3k$. Warunek x≥0 daje $0\leq k\leq 4$. Te wartości k dają dokładnie wszystkie pary z odpowiedzi.

2 / Małe kroki

1. Rozwiąż $x+y=10$, $x-y=2$.

Odpowiedź: $x=6,\ y=4$

Po dodaniu $2x=12$, więc $x=6$ i $y=4$.

2. Rozwiąż $x+y=11$, $x=5$.

Odpowiedź: $x=5,\ y=6$

Podstawiamy znane x do sumy; $y=6$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $x+y=10$ i $x=6$. Oblicz y.

Odpowiedź: 4

Od sumy odejmujemy znane x.

2. $x+y=10$, $x-y=2$. Oblicz x.

Odpowiedź: 6

Dodanie daje $2x = 12$.

3. Jeśli $x = 5$, $y = -1$, podaj znak xy.

Odpowiedź: ujemny

Iloczyn liczb o przeciwnych znakach jest ujemny.

4. $x + y = 10$, $x - y = 0$. Oblicz y.

Odpowiedź: 5

Drugi warunek mówi x=y; każda liczba jest połową sumy.

Grupa B

1. $x + y = 12$ i $x = 7$. Oblicz y.

Odpowiedź: 5

Od sumy odejmujemy znane x.

2. $x + y = 12$, $x - y = 2$. Oblicz x.

Odpowiedź: 7

Dodanie daje $2x = 14$.

3. Jeśli $x = 6$, $y = -1$, podaj znak xy.

Odpowiedź: ujemny

Iloczyn liczb o przeciwnych znakach jest ujemny.

4. $x + y = 12$, $x - y = 0$. Oblicz y.

Odpowiedź: 6

Drugi warunek mówi x=y; każda liczba jest połową sumy.

Grupa C

1. $x + y = 14$ i $x = 8$. Oblicz y.

Odpowiedź: 6

Od sumy odejmujemy znane x.

2. $x + y = 14$, $x - y = 2$. Oblicz x.

Odpowiedź: 8

Dodanie daje $2x = 16$.

3. Jeśli $x = 7$, $y = -1$, podaj znak xy.

Odpowiedź: ujemny

Iloczyn liczb o przeciwnych znakach jest ujemny.

4. $x + y = 14$, $x - y = 0$. Oblicz y.

Odpowiedź: 7

Drugi warunek mówi x=y; każda liczba jest połową sumy.

Grupa D

1. $x + y = 16$ i $x = 9$. Oblicz y.

Odpowiedź: 7

Od sumy odejmujemy znane x.

2. $x + y = 16$, $x - y = 2$. Oblicz x.

Odpowiedź: 9

Dodanie daje $2x = 18$.

3. Jeśli $x = 8$, $y = -1$, podaj znak xy.

Odpowiedź: ujemny

Iloczyn liczb o przeciwnych znakach jest ujemny.

4. $x + y = 16$, $x - y = 0$. Oblicz y.

Odpowiedź: 8

Drugi warunek mówi x=y; każda liczba jest połową sumy.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Dodawano $x + y = 10$ i $x - y = 2$.

Odpowiedź: $2x = 12$

Przy dodawaniu równań dodajemy także ich prawe strony.

2. Z $x + y = 10$ wyznaczano y.

Odpowiedź: $y = 10 - x$

Odejmujemy x od obu stron; znaki składników nie mogą zostać zamienione.

3. $x = 5$, $y = -5$. Określano znak iloczynu.

Odpowiedź: $xy = -25 < 0$

Czynniki mają przeciwne znaki, więc iloczyn jest ujemny.

Grupa B

1. Dodawano $x + y = 12$ i $x - y = 2$.

Odpowiedź: $2x = 14$

Przy dodawaniu równań dodajemy także ich prawe strony.

2. Z $x + y = 12$ wyznaczano y.

Odpowiedź: $y = 12 - x$

Odejmujemy x od obu stron; znaki składników nie mogą zostać zamienione.

3. $x = 6$, $y = -6$. Określano znak iloczynu.

Odpowiedź: $xy = -36 < 0$

Czynniki mają przeciwne znaki, więc iloczyn jest ujemny.

5 / Matematyka w świecie

1. W magazynie jest 10 pudełek dwóch typów. Pierwszych jest o 2 więcej. Ile pudełek jest każdego typu?

Odpowiedź: $6,\ 4$

Układ $x + y = 10$, $x - y = 2$ daje odpowiedź.

2. Dwa zeszyty i długopis kosztują 16 zł, a zeszyt i dwa długopisy 17 zł. Oblicz ceny obu produktów.

Odpowiedź: 5 zł; 6 zł

Układ $2x + y = 16$, $x + 2y = 17$. Po eliminacji otrzymujemy $x = 5$ i $y = 6$.

3. Dwie serie pomiarowe zawierają łącznie 10 próbek. W pierwszej są o 2 próbki więcej. Wyznacz liczebności obu serii.

Odpowiedź: $6,\ 4$

Suma i różnica dają układ liniowy. Po dodaniu równań pierwsza liczebność wynosi 6, druga 4.

4. Zadanie odwrócone: $2x + y = 16$, a y jest o 1 większe od x. Jaki będzie koszt $x + 2y$?

Odpowiedź: 17

Podstawiamy $y = x + 1$: $3x + 1 = 16$, więc $x = 5$, $y = 6$. Poszukiwany koszt to 17.