Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Nierówność kwadratowa

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Przenosimy wszystko na lewą stronę: $3x^2 - 2x - 1 < 0$. Rozkładamy trójmian na czynniki $(3x + 1)(x - 1) < 0$. Jego miejsca zerowe to $x = -\frac{1}{3}$ oraz $x = 1$. Współczynnik przy kwadracie jest dodatni, więc parabola przyjmuje wartości ujemne pomiędzy miejscami zerowymi. Końców nie włączamy, bo nierówność jest ostra. Rozwiązanie: $x \in (-\frac{1}{3}, 1)$.

Odpowiedź: $(-\frac{1}{3}, 1)$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Rozwiąż $(x - 5)(x + 5) \leq 0$.

Odpowiedź: $[-5, 5]$

Iloczyn ma znak niedodatni pomiędzy zerami, wraz z końcami.

2. Rozwiąż $x^2 - 10x + 25 < 1$.

Odpowiedź: $(4, 6)$

Mamy $(x - 5)^2 < 1$, czyli $-1 < x - 5 < 1$.

3. Rozwiąż $x^2 - 25 > 0$.

Odpowiedź: $(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$

Parabola ma dodatnie wartości na zewnątrz miejsc zerowych. Ostra nierówność wyklucza końce.

4. Wypisz wszystkie całkowite rozwiązania $(x - 5)(x - 7) \leq 0$.

Odpowiedź: $\{5, 6, 7\}$

Rozwiązania rzeczywiste tworzą przedział $[5, 7]$. Są w nim trzy liczby całkowite.

5. Dla jakich rzeczywistych m nierówność $x^2 - 2mx + m^2 + 5 - m \geq 0$ jest prawdziwa dla każdego rzeczywistego x?

Odpowiedź: $m \leq 5$

Lewą stronę zapisujemy jako $(x - m)^2 + 5 - m$. Najmniejsza wartość wynosi $5 - m$ i jest osiągana przy x=m. Musi być nieujemna, co daje warunek z odpowiedzi.

6. Wyznacz wszystkie rzeczywiste m, dla których nierówność $x^2 - 2mx + m^2 < 25$ ma dokładnie 9 rozwiązań całkowitych.

Odpowiedź: $m \in \mathbb{Z}$

Rozwiązania rzeczywiste tworzą otwarty przedział $(m - 5, m + 5)$. Gdy m jest całkowite, zawiera on kolejne liczby od $m - 4$ do $m + 4$, czyli 9 liczb. Gdy $m = k + t$, gdzie k jest całkowite i $0 < t < 1$, są to liczby od $k - 4$ do $k + 5$, czyli 10. Wymagany przypadek zachodzi wyłącznie dla całkowitych m.

2 / Małe kroki

1. Znajdź miejsca zerowe $x^2 - 25$.

Odpowiedź: $-5, 5$

Z równania $x^2 = 25$ otrzymujemy dwa przeciwne rozwiązania.

2. Jaki znak ma $x^2 + 5$ dla rzeczywistych x?

Odpowiedź: dodatni

Kwadrat jest nieujemny, a dodawana stała jest dodatnia.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Podaj zera $(x - 5)(x + 1)$.

Odpowiedź: $-1, 5$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

2. Rozwiąż $x^2 \leq 25$.

Odpowiedź: $[-5, 5]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

3. Czy $x = 5$ spełnia $x^2 < 25$?

Odpowiedź: nie

W punkcie granicznym występuje równość.

4. Jaki znak ma $(x-5)^2$?

Odpowiedź: nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Grupa B

1. Podaj zera $(x-6)(x+1)$.

Odpowiedź: $-1, 6$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

2. Rozwiąż $x^2 \leq 36$.

Odpowiedź: $[-6, 6]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

3. Czy $x = 6$ spełnia $x^2 < 36$?

Odpowiedź: nie

W punkcie granicznym występuje równość.

4. Jaki znak ma $(x-6)^2$?

Odpowiedź: nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Grupa C

1. Podaj zera $(x-7)(x+1)$.

Odpowiedź: $-1, 7$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

2. Rozwiąż $x^2 \leq 49$.

Odpowiedź: $[-7, 7]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

3. Czy $x = 7$ spełnia $x^2 < 49$?

Odpowiedź: nie

W punkcie granicznym występuje równość.

4. Jaki znak ma $(x-7)^2$?

Odpowiedź: nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Grupa D

1. Podaj zera $(x-8)(x+1)$.

Odpowiedź: $-1, 8$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

2. Rozwiąż $x^2 \leq 64$.

Odpowiedź: $[-8, 8]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

3. Czy $x = 8$ spełnia $x^2 < 64$?

Odpowiedź: nie

W punkcie granicznym występuje równość.

4. Jaki znak ma $(x-8)^2$?

Odpowiedź: nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Rozwiązywano $x^2 < 25$.

Odpowiedź: $-5 < x < 5$

Trzeba uwzględnić także ujemną granicę.

2. Rozwiązywano $(x-5)(x+5) > 0$.

Odpowiedź: $(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$

Parabola skierowana w górę jest dodatnia na zewnątrz zer.

3. Rozwiązanie $(x-5)^2 \leq 0$.

Odpowiedź: $x = 5$

Kwadrat może być równy zeru; nierówność nieostra dopuszcza tę wartość.

Grupa B

1. Rozwiązywano $x^2 < 36$.

Odpowiedź: $-6 < x < 6$

Trzeba uwzględnić także ujemną granicę.

2. Rozwiązywano $(x-6)(x+6) > 0$.

Odpowiedź: $(-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$

Parabola skierowana w górę jest dodatnia na zewnątrz zer.

3. Rozwiązanie $(x-6)^2 \leq 0$.

Odpowiedź: $x = 6$

Kwadrat może być równy zeru; nierówność nieostra dopuszcza tę wartość.

5 / Matematyka w świecie

1. Prostokąt ma boki x i $x+5$ metrów, x>0. Jego pole nie może przekroczyć 50 m^2. Wyznacz dopuszczalne x.

Odpowiedź: $0 < x \leq 5$

$x(x+5) \leq 50$ daje $(x-5)(x+10) \leq 0$. Przecinamy otrzymany przedział z x>0.

2. Model zysku to $Z(n) = -(n-5)^2 + 25$ dla całkowitego n≥0. Przy jakich n zysk jest nieujemny?

Odpowiedź: $n \in \{0, 1, \ldots, 10\}$

$(n-5)^2 \leq 25$, więc $0 \leq n \leq 10$. Wybieramy liczby całkowite.

3. W ćwiczeniowym modelu wysokość $h(t) = -t^2 + 10t$. Dla jakich nieujemnych chwil h jest dodatnia?

Odpowiedź: $0 < t < 10$

$h(t) = t(10-t)$. Iloczyn jest dodatni pomiędzy zerami 0 i 10.

4. Zadanie odwrócone: rozwiązaniem $x^2 < c$ jest dokładnie przedział $(-5, 5)$. Wyznacz c.

Odpowiedź: 25

Granice są równe $\pm\sqrt{c}$, zatem $\sqrt{c} = 5$ i $c = 25$.