Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Dzielenie wyrażeń wymiernych

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Zamieniamy dzielenie na mnożenie przez odwrotność: $\frac{4}{x(x+2)} \cdot \frac{4-x^2}{5x}$. Licznik drugiego ułamka rozkładamy na czynniki: $4-x^2=(2-x)(2+x)$. Możemy skrócić czynnik $x+2$, ponieważ dziedzina wyklucza jego zero. Pozostaje $\frac{4(2-x)}{5x^2}=\frac{8-4x}{5x^2}$. Zachowujemy wszystkie wykluczenia z pierwotnego wyrażenia. Odpowiedź: A.

Odpowiedź: A

1 / Od schematu do wyzwania

1. Uprość $\frac{x^2-25}{x-5}$ i podaj wykluczenie.

Odpowiedź: $x+5,\ x\neq 5$

Licznik rozkładamy na $(x-5)(x+5)$ i skracamy czynnik niezerowy.

2. Oblicz $\frac{x+5}{x-5} : \frac{x+5}{x-5}$ z wykluczeniami.

Odpowiedź: $1,\ x\neq \pm 5$

Dzielimy liczbę przez nią samą. Pierwszy ułamek musi istnieć i nie może być zerem: $x\neq 5$ i $x\neq -5$.

3. Uprość $\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+5}$. Podaj dziedzinę.

Odpowiedź: $\frac{10}{x^2-25},\ x\neq \pm 5$

Wspólny mianownik to $(x-5)(x+5)$. Licznik wynosi $x+5-(x-5)=10$.

4. Rozwiąż nierówność $\frac{x-5}{x+5}>0$.

Odpowiedź: $(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$

Wykluczamy $x=-5$. Iloraz jest dodatni, gdy licznik i mianownik mają te same znaki, co zachodzi w dwóch zewnętrznych przedziałach. $x=5$ daje zero, więc też go nie włączamy.

5. W zależności od rzeczywistego b rozwiąż $\frac{(x-5)(x-b)}{x-5}=0$.

Odpowiedź: $x=b$ dla $b\neq 5$; $\varnothing$ dla $b=5$

Wykluczenie $x\neq 5$ obowiązuje także po skróceniu. Dostajemy $x-b=0$. Gdy $b\neq 5$, jest to dopuszczalny pierwiastek. Gdy $b=5$, jedyna kandydatura jest wykluczona.

6. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y) spełniające $1/x+1/y=1/5$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $\{(6,30),(10,10),(30,6)\}$

Obie liczby muszą przekraczać 5, bo każdy dodatni składnik jest mniejszy od sumy. Po pomnożeniu przez $5xy$ otrzymujemy $xy=5(x+y)$, czyli $(x-5)(y-5)=25$. Każdy dodatni dzielnik d liczby 25 daje dokładnie jedną uporządkowaną parę $x=5+d$, $y=5+25/d$. Przegląd wszystkich dzielników daje odpowiedź.

2 / Małe kroki

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-5)$.

Odpowiedź: $x\neq 5$

Mianownik nie może być zerem.

2. Uprość $5x/5$.

Odpowiedź: x

Skracamy niezerowy czynnik 5.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-5)$.

Odpowiedź: $x\neq 5$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/5+1/5$.

Odpowiedź: $\frac{2}{5}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/5$ dla $x = 10$.

Odpowiedź: 2

$10/5 = 2$.

4. Uprość $(x-5)/(x-5)$ dla $x \neq 5$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa B

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-6)$.

Odpowiedź: $x \neq 6$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/6 + 1/6$.

Odpowiedź: $\frac{1}{3}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/6$ dla $x = 12$.

Odpowiedź: 2

$12/6 = 2$.

4. Uprość $(x-6)/(x-6)$ dla $x \neq 6$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa C

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-7)$.

Odpowiedź: $x \neq 7$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/7 + 1/7$.

Odpowiedź: $\frac{2}{7}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/7$ dla $x = 14$.

Odpowiedź: 2

$14/7 = 2$.

4. Uprość $(x-7)/(x-7)$ dla $x \neq 7$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa D

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-8)$.

Odpowiedź: $x \neq 8$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/8 + 1/8$.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/8$ dla $x = 16$.

Odpowiedź: 2

$16/8 = 2$.

4. Uprość $(x-8)/(x-8)$ dla $x \neq 8$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Upraszczano $(x+5)/x$ dla x≠0.

Odpowiedź: $1+5/x$

Nie skracamy składników sumy; dzielimy każdy składnik licznika przez mianownik.

2. Skrócono $(x^2-25)/(x-5)$.

Odpowiedź: $x+5,\ x\neq 5$

Skracanie nie przywraca wartości wykluczonej z pierwotnego mianownika.

3. Rozwiązano $x/(x-5)=0$.

Odpowiedź: 0

Ułamek jest zerem, gdy licznik jest zerem i mianownik niezerowy. Wskazana błędna wartość zeruje mianownik.

Grupa B

1. Upraszczano $(x+6)/x$ dla x≠0.

Odpowiedź: $1+6/x$

Nie skracamy składników sumy; dzielimy każdy składnik licznika przez mianownik.

2. Skrócono $(x^2-36)/(x-6)$.

Odpowiedź: $x+6,\ x\neq 6$

Skracanie nie przywraca wartości wykluczonej z pierwotnego mianownika.

3. Rozwiązano $x/(x-6)=0$.

Odpowiedź: 0

Ułamek jest zerem, gdy licznik jest zerem i mianownik niezerowy. Wskazana błędna wartość zeruje mianownik.

5 / Matematyka w świecie

1. Koszt wykonania n sztuk to $K(n)=5n+100$. Wyraź średni koszt jednej sztuki dla n>0.

Odpowiedź: $5+\frac{100}{n}$

Dzielimy koszt całkowity przez n: $K(n)/n=5+100/n$.

2. Cena hurtowa za n sztuk wynosi $5n+25$ zł. Ile wynosi średnia cena dla $n=5$?

Odpowiedź: 10

Średnia to $5+25/n$, czyli po podstawieniu 10 zł.

3. W roztworze jest 10 g substancji w 5 litrach. Wyraź stężenie $c(V)=10/V$ i oblicz je po dolaniu 5 litrów wody.

Odpowiedź: 1

Nowa objętość wynosi 10 l, a masa substancji się nie zmienia. $c=10/10=1$ g/l.

4. Zadanie odwrócone: średni koszt $5+100/n$ wyniósł 10 zł. Wyznacz dodatnie n.

Odpowiedź: 20

$100/n=5$, zatem $n=20$.