Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Równanie zapisane w postaci iloczynu

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Iloczyn jest równy zeru, gdy przynajmniej jeden z czynników jest zerem. Rozwiązujemy $x^2 = 4$ lub $x^2 = 9$. Dostajemy cztery różne rozwiązania: $-2,\ 2,\ -3,\ 3$. Dodajemy wszystkie, uwzględniając również ujemne: $-2 + 2 - 3 + 3 = 0$. Odpowiedź: B.

Odpowiedź: B

1 / Od schematu do wyzwania

1. Podaj wszystkie różne pierwiastki $x(x-4)(x+4) = 0$ i ich sumę.

Odpowiedź: $-4, 0, 4;\ S = 0$

Zerujemy każdy czynnik. Przeciwne liczby się redukują w sumie.

2. Ile różnych rzeczywistych rozwiązań ma $(x^2 - 16)(x^2 + 25) = 0$?

Odpowiedź: 2

Drugi czynnik jest zawsze dodatni. Pierwszy zeruje się dla $x = \pm 4$.

3. Suma wszystkich różnych rozwiązań $(x-4)(x-8)(x-m) = 0$ wynosi 0. Wyznacz m.

Odpowiedź: -12

Gdy m jest różne od 4 i 8, suma to $12 + m$, więc $m = -12$. Gdy m pokrywa się ze znanym dodatnim pierwiastkiem, suma różnych pierwiastków pozostaje 12, a nie 0.

4. Dla jakich m równanie $x(x-4)(x-m) = 0$ ma dokładnie dwa różne pierwiastki?

Odpowiedź: $m \in \{0, 4\}$

Znane pierwiastki 0 i 4 są różne. Trzeci nie może być nową liczbą, więc m musi być jedną z tych dwóch wartości.

5. Czy istnieje m, dla którego $x(x-4)(x-m) = 0$ ma trzy różne pierwiastki o sumie 4? Uzasadnij.

Odpowiedź: nie

Przy trzech różnych pierwiastkach suma wynosi $0 + 4 + m$. Warunek sumy daje m=0, ale wtedy są tylko dwa różne pierwiastki. Zachodzi sprzeczność.

6. Wyznacz wszystkie rzeczywiste k, dla których $(x^2 - 16)(x^2 - kx + 16) = 0$ ma dokładnie trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

Odpowiedź: $\varnothing$

Pierwszy czynnik daje zawsze $x = \pm 4$. W drugim wyróżnik wynosi $k^2 - 64$. Gdy jest ujemny, mamy tylko dwa znane pierwiastki. Gdy wynosi zero, k=±8, a jego jedyny pierwiastek jest już równy ±4. Gdy wyróżnik jest dodatni, drugi czynnik ma dwa pierwiastki. Żaden nie pokrywa się z ±4: takie pokrycie wymusiłoby k=±8, czyli wyróżnik zero. Dostajemy wtedy cztery różne pierwiastki. Liczba trzech rozwiązań jest niemożliwa.

2 / Małe kroki

1. Rozwiąż $x(x-4) = 0$.

Odpowiedź: $x = 0$ lub $x = 4$

Iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden czynnik jest zerem.

2. Rozwiąż $x^2 = 16$.

Odpowiedź: $x = \pm 4$

Obie liczby 4 oraz -4 mają kwadrat 16.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Rozwiąż $x(x-4) = 0$.

Odpowiedź: $0, 4$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2 - 16 = 0$.

Odpowiedź: ± 4

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-4)^2 = 0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+4) = 0$.

Odpowiedź: -4

Pierwiastki 0 i -4 sumują się do -4.

Grupa B

1. Rozwiąż $x(x-5) = 0$.

Odpowiedź: $0, 5$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2 - 25 = 0$.

Odpowiedź: ± 5

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-5)^2 = 0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+5) = 0$.

Odpowiedź: -5

Pierwiastki 0 i -5 sumują się do -5.

Grupa C

1. Rozwiąż $x(x-6) = 0$.

Odpowiedź: $0, 6$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2 - 36 = 0$.

Odpowiedź: ± 6

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-6)^2 = 0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+6) = 0$.

Odpowiedź: -6

Pierwiastki 0 i -6 sumują się do -6.

Grupa D

1. Rozwiąż $x(x-7) = 0$.

Odpowiedź: $0, 7$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2 - 49 = 0$.

Odpowiedź: ± 7

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-7)^2 = 0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+7) = 0$.

Odpowiedź: -7

Pierwiastki 0 i -7 sumują się do -7.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Rozwiązywano $x(x-4)=0$.

Odpowiedź: $x=0$ lub $x=4$

Dzielenie przez x zgubiło rozwiązanie x=0.

2. Rozwiązywano $x^2=16$.

Odpowiedź: $x=\pm 4$

Równanie kwadratowe ma także ujemne rozwiązanie.

3. Liczono różne rozwiązania $x(x-4)^2=0$.

Odpowiedź: 2 rozwiązania

Krotność czynnika nie zwiększa liczby różnych liczb będących rozwiązaniami.

Grupa B

1. Rozwiązywano $x(x-5)=0$.

Odpowiedź: $x=0$ lub $x=5$

Dzielenie przez x zgubiło rozwiązanie x=0.

2. Rozwiązywano $x^2=25$.

Odpowiedź: $x=\pm 5$

Równanie kwadratowe ma także ujemne rozwiązanie.

3. Liczono różne rozwiązania $x(x-5)^2=0$.

Odpowiedź: 2 rozwiązania

Krotność czynnika nie zwiększa liczby różnych liczb będących rozwiązaniami.

5 / Matematyka w świecie

1. W modelu zysk $Z(n)=(n-4)(n-8)$. Dla jakich nieujemnych n zysk wynosi zero?

Odpowiedź: $4, 8$

Iloczyn jest zerem, gdy którykolwiek z jego czynników jest zerem.

2. Umowny bilans $B(t)=t(t-4)(t-5)$. Podaj wszystkie nieujemne chwile zerowego bilansu.

Odpowiedź: $0, 4, 5$

Każdy czynnik liniowy daje jedną z wymienionych chwil.

3. Czujnik ma model $S(t)=(t^2-16)(t^2+1)$. Podaj nieujemne chwile t, w których odczyt jest zerowy.

Odpowiedź: 4

Drugi czynnik jest dodatni. Pierwszy daje ±4, a warunek t≥0 pozostawia 4.

4. Zadanie odwrócone: równanie $x(x-m)=0$ ma dwa różne pierwiastki o sumie 4. Wyznacz m.

Odpowiedź: 4

Pierwiastki to 0 i m. Ich suma to m, stąd $m=4$; ponieważ 4>0, są różne.