Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Dowód podzielności

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Zapisujemy $n = 2t+1$, gdzie t jest liczbą całkowitą. Po podstawieniu i rozwinięciu mamy $3(2t+1)^2+6(2t+1)+15 = 12t^2+24t+24$. Wyłączamy wspólny czynnik: $12t^2+24t+24 = 12(t^2+2t+2)$. Wyrażenie w nawiasie jest całkowite, co dowodzi podzielności przez 12.

Odpowiedź: Dowód podzielności przez 12

1 / Od schematu do wyzwania

1. Wykaż, że $n(n+1)$ jest parzyste dla każdego całkowitego n.

Odpowiedź: $2 \mid n(n+1)$

Spośród dwóch kolejnych liczb całkowitych jedna jest parzysta, więc iloczyn zawiera czynnik 2.

2. Wykaż podzielność $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}$ przez 31 dla naturalnych n.

Odpowiedź: $31 \cdot 5^n$

Wyłączamy najmniejszą potęgę: $5^n(1+5+25) = 31 \cdot 5^n$.

3. Wykaż, że $n^3 - n$ jest podzielne przez 6 dla każdego całkowitego n.

Odpowiedź: $6 \mid n^3 - n$

$n^3-n = (n-1)n(n+1)$. Wśród trzech kolejnych liczb jest wielokrotność 3 i liczba parzysta. Iloczyn jest więc podzielny przez względnie pierwsze 2 i 3, czyli przez 6.

4. Znajdź wszystkie dodatnie całkowite n, dla których $n+5$ dzieli n^2+6.

Odpowiedź: $\{26\}$

Zapisujemy $n^2+6 = (n+5)(n-5)+31$. Warunek jest równoważny temu, że dodatni dzielnik $d = n+5 > 5$ dzieli 31. Przegląd takich dzielników daje dokładnie n wskazane w odpowiedzi.

5. Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby całkowitej n liczba n^2-1 jest podzielna przez 8.

Odpowiedź: $8 \mid n^2 - 1$

$n^2-1 = (n-1)(n+1)$. Oba czynniki są parzyste i różnią się o 2, więc jeden z nich jest podzielny przez 4, a drugi przez 2. Iloczyn jest podzielny przez 8.

6. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ liczba p^2-1 jest podzielna przez 24.

Odpowiedź: $24 \mid p^2 - 1$

Liczba pierwsza p>3 jest nieparzysta, więc poprzedni argument daje podzielność p^2-1 przez 8. Nie jest też wielokrotnością 3; zatem przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 lub 2, a jej kwadrat resztę 1. Stąd p^2-1 jest podzielne przez 3. Ponieważ 8 i 3 są względnie pierwsze, otrzymujemy podzielność przez 24.

2 / Małe kroki

1. Rozłóż na iloczyn $5n^2+5n$.

Odpowiedź: $5n(n+1)$

Wyłączamy wspólny czynnik liczbowy oraz n.

2. Wyłącz 5^n w sumie $5^n + 5^{n+1}$.

Odpowiedź: $5^n(1+5)$

W drugim składniku pozostaje jeszcze jeden czynnik równy podstawie potęgi.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Wyłącz n w n^2+5n.

Odpowiedź: $n(n+5)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $5n$ jest podzielne przez 5 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $5n + 1$ przez 5 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$5n$ jest wielokrotnością 5, a 1 jest mniejsze od 5.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

Grupa B

1. Wyłącz n w $n^2 + 6n$.

Odpowiedź: $n(n + 6)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $6n$ jest podzielne przez 6 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $6n + 1$ przez 6 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$6n$ jest wielokrotnością 6, a 1 jest mniejsze od 6.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

Grupa C

1. Wyłącz n w $n^2 + 7n$.

Odpowiedź: $n(n + 7)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $7n$ jest podzielne przez 7 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $7n + 1$ przez 7 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$7n$ jest wielokrotnością 7, a 1 jest mniejsze od 7.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

Grupa D

1. Wyłącz n w $n^2 + 8n$.

Odpowiedź: $n(n + 8)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $8n$ jest podzielne przez 8 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $8n + 1$ przez 8 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$8n$ jest wielokrotnością 8, a 1 jest mniejsze od 8.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Wyłączano czynnik 5 w $5n + 10$.

Odpowiedź: $5(n + 2)$

Po wyłączeniu czynnika dzielimy przez niego każdy składnik.

2. Badano parzystość $n(n + 1)$.

Odpowiedź: Jedna z kolejnych liczb jest parzysta.

Kolejne liczby mają przeciwne parzystości.

3. Z zapisu $N = 5k + 5$ wyciągnięto wniosek o reszcie.

Odpowiedź: $r = 0$

Reszta musi być mniejsza od dzielnika. Mamy $N = 5(k + 1)$.

Grupa B

1. Wyłączano czynnik 6 w $6n + 12$.

Odpowiedź: $6(n + 2)$

Po wyłączeniu czynnika dzielimy przez niego każdy składnik.

2. Badano parzystość $n(n + 1)$.

Odpowiedź: Jedna z kolejnych liczb jest parzysta.

Kolejne liczby mają przeciwne parzystości.

3. Z zapisu $N = 6k + 6$ wyciągnięto wniosek o reszcie.

Odpowiedź: $r = 0$

Reszta musi być mniejsza od dzielnika. Mamy $N = 6(k + 1)$.

5 / Matematyka w świecie

1. W magazynie jest $5n + 15$ sztuk. Wykaż, że można je podzielić na pełne paczki po 5.

Odpowiedź: $n + 3$ paczek

$5n + 15 = 5(n + 3)$, więc liczba pełnych paczek wynosi n+3.

2. Fundusz wynosi $n^2 - 1$ zł, gdzie n jest dodatnie i nieparzyste. Wykaż, że można go rozdzielić równo na 8 całozłotowych części.

Odpowiedź: podział jest możliwy

Z dowodu podzielności $(n - 1)(n + 1)$ przez 8 wynika, że każda część wynosi całkowitą liczbę złotych.

3. Plan pomiarów przewiduje $5^k(1 + 5 + 25)$ odczytów. Ile pełnych serii po 31 odczytów można wykonać?

Odpowiedź: 5^k

Nawias wynosi 31; całkowita liczba pomiarów to $31 \cdot 5^k$.

4. Zadanie odwrócone: liczba $N = 5k + r$ daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1. Jeśli $0 \leq r < 5$, wyznacz r.

Odpowiedź: 1

Jednoznaczność reszty z dzielenia wymusza r=1.