Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Różnica kwadratów

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Stosujemy różnicę kwadratów $U^2 - V^2 = (U - V)(U + V)$. Pierwszy nawias upraszcza się do 2, a drugi do 2π. Otrzymujemy $(\pi + 1)^2 - (\pi - 1)^2 = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$. Można też rozwinąć oba kwadraty i zredukować wyrazy podobne. Odpowiedź: C.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. Oblicz $x^2 + 10x + 25$ dla $x = \sqrt{6} - 5$.

Odpowiedź: 6

Wyrażenie to $(x + 5)^2$, więc po podstawieniu zostaje $(\sqrt{6})^2 = 6$.

2. Uprość $(x + 5)^2 - (x - 5)^2$.

Odpowiedź: $20x$

Po rozwinięciu kwadraty x i stałe się redukują; pozostają dwa składniki liniowe.

3. Rozłóż na czynniki $x^3 - 10x^2 + 25x$.

Odpowiedź: $x(x - 5)^2$

Wyłączamy x: $x(x^2 - 10x + 25)$. Nawias jest kwadratem różnicy.

4. Wiadomo, że $u + v = 10$ i $uv = 1$. Oblicz $u^2 + v^2$.

Odpowiedź: 98

$u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv = 100 - 2 = 98$.

5. Wykaż, że $(x^2 + 1)^2 \geq 4x^2$ dla każdego rzeczywistego x. Podaj warunek równości.

Odpowiedź: $x = \pm 1$

Różnica stron to $x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$. Równość zachodzi dokładnie, gdy $x^2 = 1$, czyli x=1 lub x=-1.

6. Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x, y) takie, że $x^2 - y^2 = 120$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $\{(31, 29), (17, 13), (13, 7), (11, 1)\}$

Rozkładamy: $(x-y)(x+y) = 120$. Oznaczmy dodatnie czynniki przez d i e, gdzie d<e. Muszą mieć tę samą parzystość, aby $x = (d + e)/2$ i $y = (e - d)/2$ były całkowite. Sprawdzamy dzielniki d do $\sqrt{120}$. Wszystkie dopuszczalne pary czynników dają dokładnie pary wskazane w odpowiedzi; każda po podstawieniu spełnia równanie.

2 / Małe kroki

1. Rozwiń $(x + 5)^2$.

Odpowiedź: $x^2 + 10x + 25$

Korzystamy z $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

2. Rozłóż na czynniki $x^2 - 25$.

Odpowiedź: $(x - 5)(x + 5)$

To różnica kwadratów: $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Rozwiń $(x + 5)^2$.

Odpowiedź: $x^2 + 10x + 25$

Wzór: $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

2. Rozłóż $x^2 - 25$.

Odpowiedź: $(x - 5)(x + 5)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(5+1)^2-(5-1)^2$.

Odpowiedź: 20

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 10 = 20$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $5x^2+10x$.

Odpowiedź: $5x(x+2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

Grupa B

1. Rozwiń $(x+6)^2$.

Odpowiedź: $x^2+12x+36$

Wzór: $(u+v)^2 = u^2+2uv+v^2$.

2. Rozłóż x^2-36.

Odpowiedź: $(x-6)(x+6)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(6+1)^2-(6-1)^2$.

Odpowiedź: 24

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 12 = 24$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $6x^2+12x$.

Odpowiedź: $6x(x+2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

Grupa C

1. Rozwiń $(x+7)^2$.

Odpowiedź: $x^2+14x+49$

Wzór: $(u+v)^2 = u^2+2uv+v^2$.

2. Rozłóż x^2-49.

Odpowiedź: $(x-7)(x+7)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(7+1)^2-(7-1)^2$.

Odpowiedź: 28

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 14 = 28$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $7x^2+14x$.

Odpowiedź: $7x(x+2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

Grupa D

1. Rozwiń $(x+8)^2$.

Odpowiedź: $x^2+16x+64$

Wzór: $(u+v)^2 = u^2+2uv+v^2$.

2. Rozłóż x^2-64.

Odpowiedź: $(x-8)(x+8)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(8+1)^2-(8-1)^2$.

Odpowiedź: 32

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 16 = 32$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $8x^2+16x$.

Odpowiedź: $8x(x+2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Rozwijano $(x+5)^2$.

Odpowiedź: $x^2+10x+25$

Brakuje podwojonego iloczynu składników.

2. Rozkładano x^2-25.

Odpowiedź: $(x-5)(x+5)$

Różnica kwadratów nie jest kwadratem różnicy.

3. Obliczano $x^2-(x+5)^2$.

Odpowiedź: $-10x-25$

Minus dotyczy całego rozwiniętego kwadratu, w tym składnika liniowego.

Grupa B

1. Rozwijano $(x+6)^2$.

Odpowiedź: $x^2+12x+36$

Brakuje podwojonego iloczynu składników.

2. Rozkładano x^2-36.

Odpowiedź: $(x-6)(x+6)$

Różnica kwadratów nie jest kwadratem różnicy.

3. Obliczano $x^2-(x+6)^2$.

Odpowiedź: $-12x-36$

Minus dotyczy całego rozwiniętego kwadratu, w tym składnika liniowego.

5 / Matematyka w świecie

1. Kwadratowy ogródek zwiększono z boku 5 m do 7 m. O ile wzrosło pole?

Odpowiedź: 24

$(5+2)^2-5^2=24$ m^2.

2. Umowny koszt wynosi $K(x)=(x+5)^2$ zł. O ile $K(x)$ przewyższa x^2?

Odpowiedź: $10x+25$

Rozwijamy kwadrat i odejmujemy x^2. Pozostaje $10x+25$ zł.

3. Dwie kwadratowe powierzchnie do badań mają boki $t+5$ i $t-5$, gdzie $t>5$. Wyraź różnicę ich pól.

Odpowiedź: $20t$

Różnica pól jest różnicą kwadratów boków; po rozwinięciu pozostaje składnik liniowy.

4. Zadanie odwrócone: $(x+5)^2-x^2=85$. Wyznacz x.

Odpowiedź: 6

Po uproszczeniu $10x+25=85$. Stąd $x=6$.