Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Działania na logarytmach

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Dodawanie logarytmów zastępujemy logarytmem iloczynu, a odejmowanie – logarytmem ilorazu: $\log_8 4 + \log_8 32 - \log_8 2 = \log_8 \frac{4\cdot 32}{2} = \log_8 64$. Zapisujemy podstawę i argument jako potęgi liczby 2. Ponieważ $(8)^2 = 64$, szukany logarytm jest równy 2. Odpowiedź: B.

Odpowiedź: B

1 / Od schematu do wyzwania

1. Oblicz $\log_6 216 - \log_6 6$.

Odpowiedź: 2

Wartości logarytmów to 3 i 1.

2. Oblicz $\log_{36} \sqrt{6}$.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Podstawę zapisujemy z wykładnikiem 2, argument z wykładnikiem 1/2. Iloraz wykładników to 1/4.

3. Rozwiąż $\log_6(x-5) = 2$.

Odpowiedź: 41

Dziedzina: $x > 5$. Równanie daje $x - 5 = 36$, zatem $x = 41$; warunek jest spełniony.

4. Rozwiąż $\log_6 x + \log_6(x-5) = 1$.

Odpowiedź: 6

Dziedzina: $x > 5$. Iloczyn argumentów wynosi 6, więc $x^2 - 5x - 6 = 0$, czyli $(x-6)(x+1) = 0$. Tylko $x = 6$ należy do dziedziny.

5. Dla $a, b, c > 0$, różnych od 1, wykaż $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$.

Odpowiedź: 1

Zapisz $u = \log_a b$, $v = \log_b c$, $w = \log_c a$. Wtedy $b = a^u$, $c = b^v = a^{uv}$ oraz $a = c^w = a^{uvw}$. Ponieważ a≠1, mamy uvw=1.

6. Znajdź wszystkie całkowite pary $2 \le u, v \le 36$, dla których $\log_u v + \log_v u = \frac{5}{2}$. Uzasadnij.

Odpowiedź: $\{(2,4), (3,9), (4,16), (5,25), (6,36), (4,2), (9,3), (16,4), (25,5), (36,6)\}$

Niech $t = \log_u v > 0$. Wtedy $\log_v u = 1/t$. Równanie $t + 1/t = 5/2$ daje $2t^2 - 5t + 2 = 0$, więc $t = 2$ lub $t = 1/2$. Oznacza to $v = u^2$ albo $u = v^2$. Mniejsza liczba może być dowolną całkowitą od 2 do 6; większa jest jej kwadratem. To wszystkie pary podane w odpowiedzi.

2 / Małe kroki

1. Oblicz $\log_6 36$.

Odpowiedź: 2

$6^2 = 36$.

2. Oblicz $\log_6 1$.

Odpowiedź: 0

Każda dodatnia podstawa różna od 1 do potęgi 0 daje 1.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz $\log_6 6$.

Odpowiedź: 1

Podstawa do potęgi 1 jest równa sobie.

2. Oblicz $\log_6 36$.

Odpowiedź: 2

$6^2 = 36$.

3. Oblicz $\log_6 1$.

Odpowiedź: 0

Argument 1 odpowiada wykładnikowi 0.

4. Oblicz $\log_6(1/6)$.

Odpowiedź: -1

$6^{-1} = 1/6$.

Grupa B

1. Oblicz $\log_7 7$.

Odpowiedź: 1

Podstawa do potęgi 1 jest równa sobie.

2. Oblicz $\log_7 49$.

Odpowiedź: 2

$7^2 = 49$.

3. Oblicz $\log_7 1$.

Odpowiedź: 0

Argument 1 odpowiada wykładnikowi 0.

4. Oblicz $\log_7(1/7)$.

Odpowiedź: -1

$7^{-1} = 1/7$.

Grupa C

1. Oblicz $\log_8 8$.

Odpowiedź: 1

Podstawa do potęgi 1 jest równa sobie.

2. Oblicz $\log_8 64$.

Odpowiedź: 2

$8^2 = 64$.

3. Oblicz $\log_8 1$.

Odpowiedź: 0

Argument 1 odpowiada wykładnikowi 0.

4. Oblicz $\log_8(1/8)$.

Odpowiedź: -1

$8^{-1} = 1/8$.

Grupa D

1. Oblicz $\log_9 9$.

Odpowiedź: 1

Podstawa do potęgi 1 jest równa sobie.

2. Oblicz $\log_9 81$.

Odpowiedź: 2

$9^2 = 81$.

3. Oblicz $\log_9 1$.

Odpowiedź: 0

Argument 1 odpowiada wykładnikowi 0.

4. Oblicz $\log_9(1/9)$.

Odpowiedź: -1

$9^{-1} = 1/9$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Obliczano $\log_6 1$.

Odpowiedź: 0

Logarytm jest wykładnikiem. Jedynka powstaje przy wykładniku 0.

2. Upraszczano $\log_6 x + \log_6 y$ dla x,y>0.

Odpowiedź: $\log_6(xy)$

Suma logarytmów jest logarytmem iloczynu argumentów.

3. Rozwiązywano $\log_6 x = 2$.

Odpowiedź: $x = 36$

Z definicji logarytmu x jest kwadratem podstawy, nie jej podwojeniem.

Grupa B

1. Obliczano $\log_7 1$.

Odpowiedź: 0

Logarytm jest wykładnikiem. Jedynka powstaje przy wykładniku 0.

2. Upraszczano $\log_7 x + \log_7 y$ dla x,y>0.

Odpowiedź: $\log_7(xy)$

Suma logarytmów jest logarytmem iloczynu argumentów.

3. Rozwiązywano $\log_7 x = 2$.

Odpowiedź: $x = 49$

Z definicji logarytmu x jest kwadratem podstawy, nie jej podwojeniem.

5 / Matematyka w świecie

1. Skala mapy cyfrowej ma poziom $L = \log_2 z$. Dla powiększenia $z = 2^7$ oblicz L.

Odpowiedź: 7

Logarytm odczytuje wykładnik potęgi 2.

2. W modelu firma potraja sprzedaż co rok. Po ilu latach sprzedaż wzrośnie 3^5 razy?

Odpowiedź: 5

$3^t = 3^5$, więc $t = 5$.

3. Czujnik używa umownej skali $S = \log_{10} I$. Odczyt zmalał z 7 do 5. Ile razy zmalało I?

Odpowiedź: 100

Iloraz wartości to $10^7/10^5 = 10^2 = 100$.

4. Zadanie odwrócone: $\log_6 I = 5$. Odtwórz dodatnie I.

Odpowiedź: 7776

Z definicji logarytmu $I = 6^5 = 7776$.