Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Potęgi o ujemnych i ułamkowych wykładnikach

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Wykładnik $0{,}5$ oznacza pierwiastek kwadratowy, więc $4^{0,5} = 2$. Potęgi ujemne zastępujemy odwrotnościami: $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $3^{-2} = \frac{1}{9}$, $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Dzielimy ułamki, mnożąc przez odwrotność mianownika: $\frac{2/3}{1/18} = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$. Odpowiedź: B.

Odpowiedź: B

1 / Od schematu do wyzwania

1. Uprość $\frac{2^5 \cdot 4^6}{8^5}$.

Odpowiedź: 4

Wykładnik podstawy 2 wynosi $5 + 2(6) - 3 \cdot 5 = 2$.

2. Oblicz $25^{-1/2} + 5^{-1}$.

Odpowiedź: $\frac{2}{5}$

Oba składniki są równe $1/5$, więc suma to $\frac{2}{5}$.

3. Ile cyfr ma liczba $2^7 5^7$? Uzasadnij.

Odpowiedź: 8

Iloczyn wynosi 10^7: jedynka i 7 zer, czyli 8 cyfr.

4. Znajdź całkowite n spełniające $2^n < 2^7 + 1 < 2^{n+1}$.

Odpowiedź: 7

Liczba leży ściśle między 2^7 i 2^8, ponieważ $1 < 2^7$.

5. Udowodnij podzielność $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ przez 7 dla każdego naturalnego n.

Odpowiedź: $7 \cdot 2^n$

Wyłączamy 2^n: suma wynosi $2^n(1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^n$. Pozostały czynnik jest całkowity.

6. Wyznacz wszystkie nieujemne całkowite x,y spełniające $2^x + 2^y = 2^8$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $x = y = 7$

Bez straty ogólności x≤y. Gdy x<y, po wyłączeniu 2^x otrzymujemy $1 + 2^{y-x} = 2^{8-x}$. Lewa strona jest nieparzysta i większa od 1, więc nie jest potęgą 2. Zatem x=y. Wtedy $2^{x+1} = 2^8$ i $x = y = 7$. Para spełnia równanie.

2 / Małe kroki

1. Oblicz $2^5 \cdot 2^2$.

Odpowiedź: 128

Dodajemy wykładniki: $2^7 = 128$.

2. Zapisz 8^5 jako potęgę 2.

Odpowiedź: 2^{15}

$8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz $2^5/2^4$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy wykładniki: pozostaje 2^1.

2. Oblicz $3^0 + 2^{-1}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{2}$

To $1 + 1/2 = 3/2$.

3. Zapisz 4^5 jako potęgę 2.

Odpowiedź: 2^{10}

$(2^2)^5 = 2^{10}$.

4. Oblicz $10^5 \cdot 10^{-5}$.

Odpowiedź: 1

Wykładniki sumują się do zera.

Grupa B

1. Oblicz $2^6/2^5$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy wykładniki: pozostaje 2^1.

2. Oblicz $3^0 + 2^{-1}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{2}$

To $1 + 1/2 = 3/2$.

3. Zapisz 4^6 jako potęgę 2.

Odpowiedź: 2^{12}

$(2^2)^6 = 2^{12}$.

4. Oblicz $10^6 \cdot 10^{-6}$.

Odpowiedź: 1

Wykładniki sumują się do zera.

Grupa C

1. Oblicz $2^7/2^6$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy wykładniki: pozostaje 2^1.

2. Oblicz $3^0 + 2^{-1}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{2}$

To $1 + 1/2 = 3/2$.

3. Zapisz 4^7 jako potęgę 2.

Odpowiedź: 2^{14}

$(2^2)^7 = 2^{14}$.

4. Oblicz $10^7 \cdot 10^{-7}$.

Odpowiedź: 1

Wykładniki sumują się do zera.

Grupa D

1. Oblicz $2^8/2^7$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy wykładniki: pozostaje 2^1.

2. Oblicz $3^0 + 2^{-1}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{2}$

To $1 + 1/2 = 3/2$.

3. Zapisz 4^8 jako potęgę 2.

Odpowiedź: 2^{16}

$(2^2)^8 = 2^{16}$.

4. Oblicz $10^8 \cdot 10^{-8}$.

Odpowiedź: 1

Wykładniki sumują się do zera.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Upraszczano $2^5 \cdot 2^3$.

Odpowiedź: 2^8

Przy mnożeniu potęg o tej samej podstawie wykładniki dodajemy.

2. Upraszczano $(3^2)^5$.

Odpowiedź: 3^{10}

Przy potęgowaniu potęgi wykładniki mnożymy.

3. Obliczano 5^0.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podniesiona do potęgi zerowej daje 1.

Grupa B

1. Upraszczano $2^6 \cdot 2^3$.

Odpowiedź: 2^9

Przy mnożeniu potęg o tej samej podstawie wykładniki dodajemy.

2. Upraszczano $(3^2)^6$.

Odpowiedź: 3^{12}

Przy potęgowaniu potęgi wykładniki mnożymy.

3. Obliczano 6^0.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podniesiona do potęgi zerowej daje 1.

5 / Matematyka w świecie

1. Serwer przechowuje 2^5 folderów, po 2^3 pliki w każdym. Ile plików przechowuje łącznie?

Odpowiedź: 256

$2^5 \cdot 2^3 = 2^8 = 256$.

2. W modelu podwajamy zasób co rok. Początkowo jest 5 jednostek. Ile będzie po 4 latach?

Odpowiedź: 80

Po czterech podwojeniach otrzymujemy $5 \cdot 2^4 = 80$.

3. W ćwiczeniowej hodowli liczebność $N(t) = 5 \cdot 3^t$. Ile wynosi $N(3)/N(1)$?

Odpowiedź: 9

Skracamy wspólny czynnik: $N(3)/N(1) = 3^{3-1} = 9$.

4. Zadanie odwrócone: zapisano $2^x \cdot 8 = 2^{10}$. Wyznacz x.

Odpowiedź: 7

$x + 3 = 10$, więc $x = 7$.