Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Losowanie wielokrotności

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Liczb dwucyfrowych od 10 do 99 jest $99-10+1=90$. Sprzyjające wielokrotności to 34, 68. Każda liczba ma taką samą szansę, więc $P(A)=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$. Odpowiedź: D.

Odpowiedź: D

1 / Od schematu do wyzwania

1. Losujemy jedną liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo podzielności przez 17.

Odpowiedź: $\frac{1}{18}$

Sprzyjające liczby: 17,34,51,68,85. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 90, sprzyjających 5. Stąd $P=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$.

2. Losujemy jedną liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo podzielności przez 21.

Odpowiedź: $\frac{2}{45}$

Sprzyjające liczby: 21,42,63,84. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 90, sprzyjających 4. Stąd $P=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$.

3. Losujemy jedną liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo podzielności przez 12.

Odpowiedź: $\frac{4}{45}$

Sprzyjające liczby: 12,24,36,48,60,72,84,96. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 90, sprzyjających 8. Stąd $P=\frac{8}{90}=\frac{4}{45}$.

4. Z pary zbiorów $X=\{1,3,5,7,9\}$ i $Y=\{0,2,4,6,8\}$ losujemy cyfry dziesiątek i jedności. Oblicz P, że liczba jest większa od 50 i podzielna przez 6.

Odpowiedź: $\frac{1}{5}$

Warunki muszą być spełnione jednocześnie. Liczby: 54,72,78,90,96. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 25, sprzyjających 5. Stąd $P=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

5. Spośród wszystkich liczb dwucyfrowych losujemy jedną. Znajdź wszystkie dzielniki d od 30 do 40, dla których P podzielności przez d wynosi $1/45$.

Odpowiedź: $d\in\{34,35,36,37,38,39,40\}$

Prawdopodobieństwo $1/45=2/90$ oznacza 2 wielokrotności. Dla d od 30 do 33 są 3: d,2 d,3 d. Dla d od 34 do 40 są 2: d,2 d. To wszystkie liczby z podanego zakresu.

6. Losujemy jednakowo prawdopodobnie liczbę trzycyfrową o różnych cyfrach. Oblicz P podzielności przez 6. Uzasadnij zliczenie, rozpatrując cyfrę jedności.

Odpowiedź: $\frac{115}{648}$

Wszystkich liczb jest $9\cdot 9\cdot 8=648$. Cyfra jedności c jest parzysta, a suma cyfr jest podzielna przez 3. Dla ustalonego c zliczamy pary setek $a\neq 0$ i dziesiątek b, wykluczając powtórzenia. Grupujemy je według reszty a modulo 3. Dla $c=0$: $6+9+9=24$; dla $c=2$: $9+12+2=23$; dla $c=4$: $9+2+12=23$; dla $c=6$: $4+9+9=22$; dla $c=8$: $9+12+2=23$. Na przykład przy $c=2$ potrzeba $a+b\equiv 1 \pmod 3$: klasy reszt $(0,1),(1,0),(2,2)$ dają odpowiednio $3\cdot 3, 3\cdot 4, 2\cdot 1$ par. Łącznie jest 115 liczb sprzyjających. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 648, sprzyjających 115. Stąd $P=\frac{115}{648}=\frac{115}{648}$.

2 / Małe kroki

1. Ile liczb naturalnych jest od 10 do 99 włącznie?

Odpowiedź: 90

$99-10+1=90$. Wynik: 90.

2. Losujemy liczbę od 10 do 99. Oblicz P wylosowania 20 lub 40.

Odpowiedź: $\frac{1}{45}$

Są 2 sprzyjające liczby. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 90, sprzyjających 2. Stąd $P=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Ile elementów ma zbiór $\{10, 11, \ldots, 19\}$?

Odpowiedź: 10

Liczby od 10 do 19 włącznie. Wynik: 10.

2. Losujemy cyfrę od 0 do 9. Oblicz P wylosowania 0.

Odpowiedź: $\frac{1}{10}$

Jedna z 10 cyfr. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 10, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$.

3. Losujemy liczbę od 10 do 29. Oblicz P podzielności przez 2.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Sprzyjające liczby: 10,12,14,16,18,20,22,24,26,28. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 20, sprzyjających 10. Stąd $P = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

4. Losujemy dwie cyfry niezależnie, każdą z $\{1, 2\}$. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Wyniki:(1,1),(1,2),(2,1),(2,2). Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 4, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Grupa B

1. Ile elementów ma zbiór $\{10, 11, \ldots, 19\}$?

Odpowiedź: 10

Liczby od 10 do 19 włącznie. Wynik: 10.

2. Losujemy cyfrę od 0 do 9. Oblicz P wylosowania 0.

Odpowiedź: $\frac{1}{10}$

Jedna z 10 cyfr. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 10, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$.

3. Losujemy liczbę od 10 do 29. Oblicz P podzielności przez 3.

Odpowiedź: $\frac{3}{10}$

Sprzyjające liczby: 12,15,18,21,24,27. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 20, sprzyjających 6. Stąd $P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

4. Losujemy dwie cyfry niezależnie, każdą z $\{1, 2\}$. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Wyniki:(1,1),(1,2),(2,1),(2,2). Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 4, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Grupa C

1. Ile elementów ma zbiór $\{10, 11, \ldots, 19\}$?

Odpowiedź: 10

Liczby od 10 do 19 włącznie. Wynik: 10.

2. Losujemy cyfrę od 0 do 9. Oblicz P wylosowania 0.

Odpowiedź: $\frac{1}{10}$

Jedna z 10 cyfr. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 10, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$.

3. Losujemy liczbę od 10 do 29. Oblicz P podzielności przez 4.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Sprzyjające liczby: 12,16,20,24,28. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 20, sprzyjających 5. Stąd $P = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

4. Losujemy dwie cyfry niezależnie, każdą z $\{1, 2\}$. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Wyniki:(1,1),(1,2),(2,1),(2,2). Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 4, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Grupa D

1. Ile elementów ma zbiór $\{10, 11, \ldots, 19\}$?

Odpowiedź: 10

Liczby od 10 do 19 włącznie. Wynik: 10.

2. Losujemy cyfrę od 0 do 9. Oblicz P wylosowania 0.

Odpowiedź: $\frac{1}{10}$

Jedna z 10 cyfr. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 10, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$.

3. Losujemy liczbę od 10 do 29. Oblicz P podzielności przez 5.

Odpowiedź: $\frac{1}{5}$

Sprzyjające liczby: 10,15,20,25. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 20, sprzyjających 4. Stąd $P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

4. Losujemy dwie cyfry niezależnie, każdą z $\{1, 2\}$. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Wyniki:(1,1),(1,2),(2,1),(2,2). Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 4, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Losujemy jedną liczbę dwucyfrową. Są 2 sprzyjające liczby.

Odpowiedź: $P = 2/90$

Liczb dwucyfrowych jest 90, a nie 89.

2. Losujemy niezależnie cyfrę z 3-elementowego i 2-elementowego zbioru. Jest 1 sprzyjająca para.

Odpowiedź: $P = 1/6$

Liczbę par otrzymujemy przez mnożenie 3 razy 2.

3. Wśród 10 równych szansą wyników są 2 sprzyjające.

Odpowiedź: $\frac{1}{5}$

W liczniku jest liczba wyników sprzyjających, a w mianowniku wszystkich.

Grupa B

1. Losujemy jedną liczbę dwucyfrową. Są 2 sprzyjające liczby.

Odpowiedź: $P = 2/90$

Liczb dwucyfrowych jest 90, a nie 89.

2. Losujemy niezależnie cyfrę z 3-elementowego i 2-elementowego zbioru. Jest 1 sprzyjająca para.

Odpowiedź: $P = 1/6$

Liczbę par otrzymujemy przez mnożenie 3 razy 2.

3. Wśród 10 równych szansą wyników są 3 sprzyjające.

Odpowiedź: $\frac{3}{10}$

W liczniku jest liczba wyników sprzyjających, a w mianowniku wszystkich.

5 / Matematyka w świecie

1. Na 20 biletach tylko 3 mają symbol nagrody. Losujemy jeden bilet. Oblicz P nagrody.

Odpowiedź: $\frac{3}{20}$

Trzy bilety sprzyjające spośród 20.

2. Z 90 dwucyfrowych kodów rabatu nagrodę dają kody 34 i 68. Losujemy jeden kod. Oblicz P nagrody.

Odpowiedź: $\frac{1}{45}$

Dwa sprzyjające kody spośród 90.

3. Próbki ponumerowano od 1 do 30. Do kontroli wybiera się jednakowo prawdopodobnie jedną. Oblicz P numeru podzielnego przez 6.

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$

Numery 6,12,18,24,30 dają 5 możliwości z 30.

4. W losowaniu spośród 90 liczb dwucyfrowych zdarzenie ma P=1/30. Ile jest liczb sprzyjających?

Odpowiedź: 3

Jeśli ich liczba to s, to $s/90 = 1/30$, więc s=3.