Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Kolorowanie sąsiadujących obszarów

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Obszar 3 kolorujemy na 7 sposobów. Każdy z obszarów 2, 4 i 5 sąsiaduje z 3, ma więc po 6 możliwości. Następnie 1 musi różnić się od 2, a 6 od 5; każde ma po 6 możliwości. Innych wspólnych granic nie ma. Z zasady mnożenia otrzymujemy $7 \cdot 6^5$.

Odpowiedź: A

1 / Od schematu do wyzwania

1. Pasek ma 4 pól. Sąsiednie pola mają mieć różne kolory spośród 4. Ile kolorowań?

Odpowiedź: 108

Pierwsze pole: 4 wyborów, każde następne: 3. Wynik: 108.

2. Trzy pola graniczą każde z każdym. Ile poprawnych kolorowań przy 4 kolorach?

Odpowiedź: 24

Trzy pola potrzebują różnych kolorów. Kolejne wybory: $k, k-1, k-2$. Wynik: 24.

3. Cztery pola w szeregu kolorujemy 4 kolorami, sąsiednie różnie. Pierwsze i trzecie mają ten sam kolor. Ile możliwości?

Odpowiedź: 36

Pierwsze i trzecie wybieramy razem. Drugie i czwarte muszą różnić się od nich, ale nie sąsiadują ze sobą. Wynik: 36.

4. Cztery pola tworzą pierścień, każde graniczy z dwoma sąsiadami. Ile kolorowań 4 kolorami?

Odpowiedź: 84

Jeśli przeciwległe pola 1 i 3 są równe: $k(k-1)^2$ możliwości. Jeśli różne: $k(k-1)(k-2)^2$. Dodajemy. Wynik: 84.

5. Czy pierścień z 5 pól można pokolorować 2 kolorami tak, aby sąsiednie były różne? Udowodnij.

Odpowiedź: Nie.

Kolory musiałyby się przeplatać. Pole 5 miałoby ten sam kolor co pole 1, a sąsiadują. To sprzeczność.

6. Wyprowadź wzór na liczbę kolorowań pierścienia pięciu pól k kolorami, dla $k \geq 2$, gdy sąsiednie pola są różne. Pola mają ustalone położenie; obroty rozróżniamy.

Odpowiedź: $k(k-1)(k-2)(k^2-2k+2)$

Pasek pięciu pól ma $k(k-1)^4$ kolorowań. Odejmujemy kolorowania o równych skrajnych polach: po ich sklejeniu dostajemy pierścień czterech pól, czyli $k(k-1)(k^2-3k+3)$ kolorowań. Różnica wynosi $k(k-1)[(k-1)^3-(k^2-3k+3)] = k(k-1)(k-2)(k^2-2k+2)$.

2 / Małe kroki

1. Dwa sąsiednie pola kolorujemy 3 kolorami na różne kolory. Ile możliwości?

Odpowiedź: 6

Pierwsze:3, drugie:2; $3 \cdot 2 = 6$. Wynik: 6.

2. Trzy pola w szeregu kolorujemy 4 kolorami, sąsiednie różnie. Ile kolorowań?

Odpowiedź: 36

$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$. Wynik: 36.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Dwa niezależne pola, każde ma 4 kolorów. Ile kolorowań?

Odpowiedź: 16

Wybory mnożymy. Wynik: 16.

2. Dwa sąsiednie pola mają różne kolory spośród 4. Ile możliwości?

Odpowiedź: 12

Drugie pole ma o jeden wybór mniej. Wynik: 12.

3. Pasek 3 pól kolorujemy 2 kolorami, sąsiednie różnie. Ile możliwości?

Odpowiedź: 2

Wybór pierwszego ustala pozostałe. Wynik: 2.

4. Wybrano kolor pierwszego pola. Ile kolorów spośród 4 zostaje dla sąsiada?

Odpowiedź: 3

Wykluczamy kolor sąsiada. Wynik: 3.

Grupa B

1. Dwa niezależne pola, każde ma 5 kolorów. Ile kolorowań?

Odpowiedź: 25

Wybory mnożymy. Wynik: 25.

2. Dwa sąsiednie pola mają różne kolory spośród 5. Ile możliwości?

Odpowiedź: 20

Drugie pole ma o jeden wybór mniej. Wynik: 20.

3. Pasek 3 pól kolorujemy 2 kolorami, sąsiednie różnie. Ile możliwości?

Odpowiedź: 2

Wybór pierwszego ustala pozostałe. Wynik: 2.

4. Wybrano kolor pierwszego pola. Ile kolorów spośród 5 zostaje dla sąsiada?

Odpowiedź: 4

Wykluczamy kolor sąsiada. Wynik: 4.

Grupa C

1. Dwa niezależne pola, każde ma 6 kolorów. Ile kolorowań?

Odpowiedź: 36

Wybory mnożymy. Wynik: 36.

2. Dwa sąsiednie pola mają różne kolory spośród 6. Ile możliwości?

Odpowiedź: 30

Drugie pole ma o jeden wybór mniej. Wynik: 30.

3. Pasek 3 pól kolorujemy 2 kolorami, sąsiednie różnie. Ile możliwości?

Odpowiedź: 2

Wybór pierwszego ustala pozostałe. Wynik: 2.

4. Wybrano kolor pierwszego pola. Ile kolorów spośród 6 zostaje dla sąsiada?

Odpowiedź: 5

Wykluczamy kolor sąsiada. Wynik: 5.

Grupa D

1. Dwa niezależne pola, każde ma 7 kolorów. Ile kolorowań?

Odpowiedź: 49

Wybory mnożymy. Wynik: 49.

2. Dwa sąsiednie pola mają różne kolory spośród 7. Ile możliwości?

Odpowiedź: 42

Drugie pole ma o jeden wybór mniej. Wynik: 42.

3. Pasek 3 pól kolorujemy 2 kolorami, sąsiednie różnie. Ile możliwości?

Odpowiedź: 2

Wybór pierwszego ustala pozostałe. Wynik: 2.

4. Wybrano kolor pierwszego pola. Ile kolorów spośród 7 zostaje dla sąsiada?

Odpowiedź: 6

Wykluczamy kolor sąsiada. Wynik: 6.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Dwa sąsiednie pola mają różne kolory spośród 4.

Odpowiedź: 12

Drugie pole nie może powtórzyć koloru pierwszego.

2. Pasek 3 pól kolorujemy 3 kolorami, sąsiednie różnie.

Odpowiedź: 12

Pole 3 może mieć kolor pola 1. Poprawnie $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

3. Trójkątny pierścień 3 pól kolorujemy 2 kolorami.

Odpowiedź: 0

Każde pole sąsiaduje z dwoma pozostałymi; potrzebne są 3 różne kolory.

Grupa B

1. Dwa sąsiednie pola mają różne kolory spośród 5.

Odpowiedź: 20

Drugie pole nie może powtórzyć koloru pierwszego.

2. Pasek 3 pól kolorujemy 3 kolorami, sąsiednie różnie.

Odpowiedź: 12

Pole 3 może mieć kolor pola 1. Poprawnie $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

3. Trójkątny pierścień 3 pól kolorujemy 2 kolorami.

Odpowiedź: 0

Każde pole sąsiaduje z dwoma pozostałymi; potrzebne są 3 różne kolory.

5 / Matematyka w świecie

1. Projektant oznacza 4 kolejnych odcinków szlaku 4 kolorami. Sąsiednie muszą się różnić. Ile oznaczeń?

Odpowiedź: 108

Pierwszy odcinek ma k możliwości, każdy następny k-1.

2. Sklep wybiera kolory 3 sąsiadujących etykiet spośród 5 barw. Sąsiednie są różne, skrajne mogą być równe. Ile zestawów?

Odpowiedź: 80

$5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$.

3. W modelu zapis z 4 symboli A,C,G,T ma mieć różne symbole sąsiednie. Ile zapisów spełnia warunek?

Odpowiedź: 108

$4 \cdot 3^3 = 108$. To warunek modelu, nie ogólna cecha DNA.

4. Dwa sąsiednie pola można pokolorować na 12 sposobów tak, aby miały różne kolory. Ile jest dostępnych kolorów?

Odpowiedź: 4

$k(k-1) = 12$, czyli $(k-4)(k+3) = 0$. Dodatnia liczba kolorów to 4.