Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Pola i objętości brył podobnych

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Przy skali podobieństwa k pola mnożymy przez k^2, a objętości przez k^3. Tutaj pole to $12\pi \cdot 2^2 = 48\pi$, a objętość $4\pi \cdot 2^3 = 32\pi$. Odpowiedź: PP.

Odpowiedź: PP

1 / Od schematu do wyzwania

1. Bryła ma pole 12 i objętość 8. Oblicz pole oraz objętość podobnej bryły w skali 2.

Odpowiedź: $48;\ 64$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Pole mnożymy przez k², a objętość przez k³.

2. Pola podobnych brył są w stosunku $4 : 1$. Objętość mniejszej wynosi 5. Oblicz objętość większej.

Odpowiedź: 40

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Dodatnia skala długości to pierwiastek z k², czyli k. Skala objętości to k³.

3. Objętości podobnych brył są w stosunku $8 : 1$. Pole większej wynosi 28. Oblicz pole mniejszej.

Odpowiedź: 7

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Skala długości wynosi k, a pól k². Pole mniejszej to 7 k²/k²=7.

4. Walec i stożek mają równe wysokości, a promień stożka jest 2 razy większy od promienia walca. Oblicz stosunek ich objętości.

Odpowiedź: $\frac{4}{3}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Walec ma V=πr²h, a stożek V=(π/3)(kr)²h. Dzieląc, dostajemy k²/3. To porównanie wzorów, nie podobieństwo różnych typów brył.

5. Wykaż, że dla podobnych brył $(V_2/V_1)^2 = (P_2/P_1)^3$. Czy relacja zależy od skali?

Odpowiedź: $(k^3)^2 = (k^2)^3 = k^6$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Stosunek objętości jest k³, a pól k². Podnosimy pierwszy do kwadratu i drugi do sześcianu; oba dają k⁶. Relacja zachodzi dla każdej dodatniej skali.

6. Większa bryła jest podobna do mniejszej. Różnica stosunków objętości i pól wynosi 4. Wyznacz skalę k i uzasadnij jednoznaczność.

Odpowiedź: 2

Oznaczmy szukaną skalę przez t>1. Równanie t³−t²=4 ma postać $(t-2)(t^2+(1)t+2)=0$. Drugi czynnik jest dodatni dla t>0, więc jedyną dodatnią skalą jest t=2.

2 / Małe kroki

1. Bryłę powiększono w skali 2. Podaj skalę pól powierzchni.

Odpowiedź: 4

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Pole jest wielkością dwuwymiarową, więc mnożymy je przez k².

2. Bryłę powiększono w skali 2. Podaj skalę objętości.

Odpowiedź: 8

Objętość zmienia się w sześcianie skali długości.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Skala długości to 2. Podaj skalę pól.

Odpowiedź: 4

Podnosimy skalę do kwadratu.

2. Skala długości to 2. Podaj skalę objętości.

Odpowiedź: 8

Podnosimy skalę do sześcianu.

3. Skala pól to 4. Podaj skalę długości.

Odpowiedź: 2

Bierzemy dodatni pierwiastek kwadratowy.

4. Skala objętości to 8. Podaj skalę długości.

Odpowiedź: 2

Bierzemy dodatni pierwiastek sześcienny.

Grupa B

1. Skala długości to 3. Podaj skalę pól.

Odpowiedź: 9

Podnosimy skalę do kwadratu.

2. Skala długości to 3. Podaj skalę objętości.

Odpowiedź: 27

Podnosimy skalę do sześcianu.

3. Skala pól to 9. Podaj skalę długości.

Odpowiedź: 3

Bierzemy dodatni pierwiastek kwadratowy.

4. Skala objętości to 27. Podaj skalę długości.

Odpowiedź: 3

Bierzemy dodatni pierwiastek sześcienny.

Grupa C

1. Skala długości to 4. Podaj skalę pól.

Odpowiedź: 16

Podnosimy skalę do kwadratu.

2. Skala długości to 4. Podaj skalę objętości.

Odpowiedź: 64

Podnosimy skalę do sześcianu.

3. Skala pól to 16. Podaj skalę długości.

Odpowiedź: 4

Bierzemy dodatni pierwiastek kwadratowy.

4. Skala objętości to 64. Podaj skalę długości.

Odpowiedź: 4

Bierzemy dodatni pierwiastek sześcienny.

Grupa D

1. Skala długości to 5. Podaj skalę pól.

Odpowiedź: 25

Podnosimy skalę do kwadratu.

2. Skala długości to 5. Podaj skalę objętości.

Odpowiedź: 125

Podnosimy skalę do sześcianu.

3. Skala pól to 25. Podaj skalę długości.

Odpowiedź: 5

Bierzemy dodatni pierwiastek kwadratowy.

4. Skala objętości to 125. Podaj skalę długości.

Odpowiedź: 5

Bierzemy dodatni pierwiastek sześcienny.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Bryłę powiększono w skali 2.

Odpowiedź: 4

Pole zmienia się w kwadracie skali, nie liniowo.

2. Bryłę powiększono w skali 2.

Odpowiedź: 8

Objętość zmienia się w sześcianie skali.

3. Objętości podobnych brył są w stosunku 8:1.

Odpowiedź: 2

Należy spierwiastkować stosunek objętości sześciennie.

Grupa B

1. Bryłę powiększono w skali 3.

Odpowiedź: 9

Pole zmienia się w kwadracie skali, nie liniowo.

2. Bryłę powiększono w skali 3.

Odpowiedź: 27

Objętość zmienia się w sześcianie skali.

3. Objętości podobnych brył są w stosunku 27:1.

Odpowiedź: 3

Należy spierwiastkować stosunek objętości sześciennie.

5 / Matematyka w świecie

1. Model budynku powiększono w skali 2. Mały model zajmował objętość 8 dm³. Oblicz objętość większego.

Odpowiedź: $64\ \text{dm}^3$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Objętość wzrasta k³ razy.

2. Podobne opakowanie powiększono w skali 2. Stare wymagało 12 dm² kartonu. Ile wymaga nowe, pomijając zakładki?

Odpowiedź: $48\ \text{dm}^2$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Zużycie kartonu jest proporcjonalne do pola powierzchni, więc rośnie k² razy.

3. W modelu dwóch podobnych próbek wszystkie długości większej są 2 razy większe. Jaki jest stosunek objętości?

Odpowiedź: $8 : 1$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Trzy niezależne wymiary zwiększają się k razy, dlatego objętość rośnie k³ razy.

4. Duży model ma objętość 64 dm³, mały 8 dm³, a oba są podobne. Odtwórz skalę długości i skalę pól.

Odpowiedź: $2;\ 4$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Iloraz objętości to k³. Po wyciągnięciu pierwiastka sześciennego otrzymujemy k; pola zmieniają się k² razy.