Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Kąt ściany bocznej i objętość

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Niech O będzie środkiem kwadratowej podstawy, M środkiem jej boku, a S wierzchołkiem ostrosłupa. Kąt SMO ma $30°$ i $OM = 6$. W trójkącie prostokątnym SOM mamy $h = OM \tan 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. Pole podstawy wynosi $12^2 = 144$. Stąd $V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 2\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $96\sqrt{3}$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Bok podstawy prawidłowego ostrosłupa czworokątnego wynosi 12. Ściana boczna tworzy z podstawą kąt $30°$. Oblicz wysokość i objętość.

Odpowiedź: $2\sqrt{3};\ 96\sqrt{3}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. W przekroju przez środek boku rzut ma długość a/2=3 k. Wysokość to $3k \tan 30° = k\sqrt{3}$. Objętość: $a^2h/3 = 12k^3\sqrt{3}$.

2. Bok podstawy wynosi 12, a krawędź boczna tworzy z podstawą kąt $45°$. Oblicz wysokość prawidłowego ostrosłupa czworokątnego.

Odpowiedź: $6\sqrt{2}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Rzut krawędzi bocznej to połowa przekątnej kwadratu, czyli $3k\sqrt{2}$. Tangens 45 stopni wynosi 1, więc wysokość jest równa rzutowi.

3. Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma bok podstawy 12 i wysokość 8. Oblicz wysokość ściany bocznej i pole boczne.

Odpowiedź: $10;\ 240$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Wysokość ściany: $\sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = 5k$. Cztery trójkąty mają łącznie pole $4 \cdot (6k)(5k)/2 = 60k^2$.

4. Bok podstawy prawidłowego ostrosłupa czworokątnego wynosi 12, a wysokość ściany bocznej 10. Oblicz jego objętość.

Odpowiedź: 384

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Wysokość bryły: $\sqrt{(5k)^2 - (3k)^2} = 4k$. Objętość to $(6k)^2(4k)/3 = 48k^3$.

5. W prawidłowym ostrosłupie czworokątnym krawędź boczna tworzy z podstawą kąt α, a ściana boczna kąt β. Wykaż $\tan\beta = \sqrt{2}\tan\alpha$.

Odpowiedź: $\tan\beta = \sqrt{2}\tan\alpha$

Niech bok podstawy ma a, a wysokość h. Rzut krawędzi ma długość $a\sqrt{2}/2$, a rzut wysokości ściany a/2. Zatem $\tan\alpha = h/(a\sqrt{2}/2)$ i $\tan\beta = h/(a/2)$. Iloraz tych tangensów wynosi $\sqrt{2}$.

6. Bok podstawy a i wysokość h prawidłowego ostrosłupa czworokątnego spełniają $a + h = 18$. Wyznacz największą objętość i uzasadnij bez pochodnych.

Odpowiedź: $V_{max} = 288;\ a = 12,\ h = 6$

Z nierówności średniej arytmetycznej i geometrycznej dla $a/2, a/2, h$ mamy $(a/2)^2h \le ((18)/3)^3 = 216$. Zatem $V = a^2h/3 \le 288$. Równość wymaga $a/2 = h = 6$, więc a=12.

2 / Małe kroki

1. Prawidłowy ostrosłup czworokątny ma bok podstawy 12. Oblicz pole podstawy.

Odpowiedź: 144

Podstawa jest kwadratem: $P=a^2$.

2. Ostrosłup ma pole podstawy 144 i wysokość 8. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 384

$V = 144 \cdot 8/3 = 384$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Kwadratowa podstawa ma bok 2. Podaj jej pole.

Odpowiedź: 4

Pole kwadratu to kwadrat boku.

2. Pole podstawy to 12, wysokość 2. Oblicz V.

Odpowiedź: 8

Dzielimy iloczyn pola i wysokości przez 3.

3. Bok podstawy ma 4. Jaki jest rzut wysokości ściany bocznej?

Odpowiedź: 2

Rzut łączy środek kwadratu ze środkiem boku, więc ma a/2.

4. Kąt ściany z podstawą to 45 stopni, rzut wysokości ściany ma 4. Oblicz h.

Odpowiedź: 4

$h = 4 \tan 45^\circ = 4.$

Grupa B

1. Kwadratowa podstawa ma bok 3. Podaj jej pole.

Odpowiedź: 9

Pole kwadratu to kwadrat boku.

2. Pole podstawy to 27, wysokość 3. Oblicz V.

Odpowiedź: 27

Dzielimy iloczyn pola i wysokości przez 3.

3. Bok podstawy ma 6. Jaki jest rzut wysokości ściany bocznej?

Odpowiedź: 3

Rzut łączy środek kwadratu ze środkiem boku, więc ma a/2.

4. Kąt ściany z podstawą to 45 stopni, rzut wysokości ściany ma 4. Oblicz h.

Odpowiedź: 4

$h = 4 \tan 45^\circ = 4.$

Grupa C

1. Kwadratowa podstawa ma bok 4. Podaj jej pole.

Odpowiedź: 16

Pole kwadratu to kwadrat boku.

2. Pole podstawy to 48, wysokość 4. Oblicz V.

Odpowiedź: 64

Dzielimy iloczyn pola i wysokości przez 3.

3. Bok podstawy ma 8. Jaki jest rzut wysokości ściany bocznej?

Odpowiedź: 4

Rzut łączy środek kwadratu ze środkiem boku, więc ma a/2.

4. Kąt ściany z podstawą to 45 stopni, rzut wysokości ściany ma 4. Oblicz h.

Odpowiedź: 4

$h = 4 \tan 45^\circ = 4.$

Grupa D

1. Kwadratowa podstawa ma bok 5. Podaj jej pole.

Odpowiedź: 25

Pole kwadratu to kwadrat boku.

2. Pole podstawy to 75, wysokość 5. Oblicz V.

Odpowiedź: 125

Dzielimy iloczyn pola i wysokości przez 3.

3. Bok podstawy ma 10. Jaki jest rzut wysokości ściany bocznej?

Odpowiedź: 5

Rzut łączy środek kwadratu ze środkiem boku, więc ma a/2.

4. Kąt ściany z podstawą to 45 stopni, rzut wysokości ściany ma 4. Oblicz h.

Odpowiedź: 4

$h = 4\tan 45^\circ = 4.$

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Pole podstawy 24, wysokość 2.

Odpowiedź: 16

W objętości ostrosłupa trzeba podzielić przez 3.

2. Bok podstawy 12; kąt ściany z podstawą 30 stopni.

Odpowiedź: $2\sqrt{3}$

Rzut wysokości ściany to połowa boku, a nie cały bok.

3. Bok podstawy 12; wysokość bryły 8.

Odpowiedź: 10

Wysokość ściany jest przeciwprostokątną w trójkącie o przyprostokątnych 3 t i 4 t.

Grupa B

1. Pole podstawy 54, wysokość 3.

Odpowiedź: 54

W objętości ostrosłupa trzeba podzielić przez 3.

2. Bok podstawy 18; kąt ściany z podstawą 30 stopni.

Odpowiedź: $3\sqrt{3}$

Rzut wysokości ściany to połowa boku, a nie cały bok.

3. Bok podstawy 18; wysokość bryły 12.

Odpowiedź: 15

Wysokość ściany jest przeciwprostokątną w trójkącie o przyprostokątnych 3 t i 4 t.

5 / Matematyka w świecie

1. Dach ma kształt prawidłowego ostrosłupa czworokątnego o boku podstawy 12 m i wysokości 8 m. Oblicz objętość przestrzeni pod dachem.

Odpowiedź: $384\ \text{m}^3$

Korzystamy z $V=a^2h/3$.

2. Bok kwadratowej podstawy daszku to 12 dm, a wysokość ściany 10 dm. Ile dm^2 pokrycia potrzeba na cztery ściany?

Odpowiedź: $240\ \text{dm}^2$

Sumujemy pola czterech trójkątów: $4\cdot a\cdot l/2$.

3. W modelu próbki użyto ostrosłupa o polu podstawy 144 mm^2 i wysokości 8 mm. Oblicz objętość modelu.

Odpowiedź: $384\ \text{mm}^3$

Objętość modelu to jedna trzecia pola podstawy razy wysokość.

4. Piramidalne opakowanie ma kwadratowy bok podstawy 12 cm i objętość 384 cm^3. Odtwórz wysokość.

Odpowiedź: 8 cm

Z $V=a^2h/3$ otrzymujemy $h=3\,V/a^2$.