Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Przekrój sześcianu

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Oznaczmy krawędź sześcianu przez a. Każdy bok trójkąta ACH jest przekątną ściany, ma więc długość $a\sqrt{2}$. Trójkąt jest równoboczny. Jego pole to $\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Z równania $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ otrzymujemy $a^2 = 8$, więc dodatnia długość $a = 2\sqrt{2}$.

Odpowiedź: B

1 / Od schematu do wyzwania

1. W sześcianie o krawędzi 4 punkty A,C,H są tak dobrane, że każde dwa łączy przekątna ściany. Oblicz pole trójkąta ACH.

Odpowiedź: $8\sqrt{3}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Każdy bok trójkąta ma długość a√2, więc jest równoboczny. Pole to $(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}/4 = a^2\sqrt{3}/2 = 2k^2\sqrt{3}$.

2. Trójkąt utworzony przez trzy przekątne ścian sześcianu ma pole $8\sqrt{3}$. Oblicz krawędź sześcianu.

Odpowiedź: 4

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Równanie a²√3/2=2 k²√3 daje a²=4 k². Długość jest dodatnia: a=2 k.

3. Sześcian ma przekątną przestrzenną $4\sqrt{3}$. Oblicz sumę pól wszystkich ścian.

Odpowiedź: 96

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Przekątna przestrzenna to a√3, więc krawędź wynosi 2 k. Suma pól to 6 a²=24 k².

4. Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu wynosi 48. Oblicz stosunek pola trójkąta z trzech przekątnych ścian do pola całkowitego sześcianu.

Odpowiedź: $\frac{\sqrt{3}}{12}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Z sumy krawędzi a=2 k. Pole trójkąta to a²√3/2, a powierzchni 6 a². Iloraz upraszcza się do √3/12.

5. Wykaż, że stosunek przekątnej przestrzennej sześcianu do wysokości trójkąta z trzech przekątnych ścian jest stały. Oblicz go.

Odpowiedź: $\sqrt{2}$

Trójkąt równoboczny ma bok a√2 i wysokość $a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}/2 = a\sqrt{6}/2$. Przekątna przestrzenna to a√3. Iloraz $(a\sqrt{3})/(a\sqrt{6}/2) = \sqrt{2}$ nie zależy od a.

6. Pomalowany z zewnątrz sześcian podzielono na n^3 jednakowych małych sześcianów, n≥3. Dokładnie jedną pomalowaną ścianę ma tyle samo kostek, co dokładnie dwie. Wyznacz n i uzasadnij.

Odpowiedź: 4

Dokładnie dwie pomalowane ściany ma 12(n−2) kostek leżących na krawędziach poza wierzchołkami. Dokładnie jedną ma 6(n−2)² kostek z wnętrz ścian. Równanie 12(n−2)=6(n−2)², po podzieleniu przez dodatnie 6(n−2), daje n−2=2, czyli n=4.

2 / Małe kroki

1. Sześcian ma krawędź 4. Oblicz przekątną ściany.

Odpowiedź: $4\sqrt{2}$

Przekątna kwadratu ma długość a√2.

2. Sześcian ma krawędź 4. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 64

Objętość sześcianu to a³.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Krawędź sześcianu ma 2. Podaj przekątną ściany.
Odpowiedź: $2\sqrt{2}$
Stosujemy wzór na przekątną kwadratu.
2. Krawędź wynosi 2. Podaj przekątną przestrzenną.
Odpowiedź: $2\sqrt{3}$
Dwukrotne użycie Pitagorasa daje a√3.
3. Krawędź wynosi 2. Podaj pole całkowite.
Odpowiedź: 24
Sześcian ma sześć kwadratowych ścian.
4. Ile krawędzi ma sześcian?
Odpowiedź: 12
Po cztery na dole i na górze oraz cztery pionowe.

Grupa B

1. Krawędź sześcianu ma 3. Podaj przekątną ściany.
Odpowiedź: $3\sqrt{2}$
Stosujemy wzór na przekątną kwadratu.
2. Krawędź wynosi 3. Podaj przekątną przestrzenną.
Odpowiedź: $3\sqrt{3}$
Dwukrotne użycie Pitagorasa daje a√3.
3. Krawędź wynosi 3. Podaj pole całkowite.
Odpowiedź: 54
Sześcian ma sześć kwadratowych ścian.
4. Ile krawędzi ma sześcian?
Odpowiedź: 12
Po cztery na dole i na górze oraz cztery pionowe.

Grupa C

1. Krawędź sześcianu ma 4. Podaj przekątną ściany.
Odpowiedź: $4\sqrt{2}$
Stosujemy wzór na przekątną kwadratu.
2. Krawędź wynosi 4. Podaj przekątną przestrzenną.
Odpowiedź: $4\sqrt{3}$
Dwukrotne użycie Pitagorasa daje a√3.
3. Krawędź wynosi 4. Podaj pole całkowite.
Odpowiedź: 96
Sześcian ma sześć kwadratowych ścian.
4. Ile krawędzi ma sześcian?
Odpowiedź: 12
Po cztery na dole i na górze oraz cztery pionowe.

Grupa D

1. Krawędź sześcianu ma 5. Podaj przekątną ściany.
Odpowiedź: $5\sqrt{2}$
Stosujemy wzór na przekątną kwadratu.
2. Krawędź wynosi 5. Podaj przekątną przestrzenną.
Odpowiedź: $5\sqrt{3}$
Dwukrotne użycie Pitagorasa daje a√3.
3. Krawędź wynosi 5. Podaj pole całkowite.
Odpowiedź: 150

Sześcian ma sześć kwadratowych ścian.

4. Ile krawędzi ma sześcian?

Odpowiedź: 12

Po cztery na dole i na górze oraz cztery pionowe.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Sześcian ma krawędź 2.

Odpowiedź: $2\sqrt{2}$

Czynnik √3 dotyczy przekątnej przestrzennej.

2. Krawędź wynosi 2.

Odpowiedź: 24

Pomnożenie pola jednej ściany przez sześć daje pole całkowite.

3. Trójkąt składa się z trzech przekątnych ścian sześcianu.

Odpowiedź: To trójkąt równoboczny.

Wszystkie trzy przekątne ścian mają tę samą długość a√2.

Grupa B

1. Sześcian ma krawędź 3.

Odpowiedź: $3\sqrt{2}$

Czynnik √3 dotyczy przekątnej przestrzennej.

2. Krawędź wynosi 3.

Odpowiedź: 54

Pomnożenie pola jednej ściany przez sześć daje pole całkowite.

3. Trójkąt składa się z trzech przekątnych ścian sześcianu.

Odpowiedź: To trójkąt równoboczny.

Wszystkie trzy przekątne ścian mają tę samą długość a√2.

5 / Matematyka w świecie

1. Sześcienne pudełko ma krawędź 4 cm. Jaka jest największa długość prostego patyczka mieszczącego się w pudełku?

Odpowiedź: $4\sqrt{3}$ cm

Patyczek może leżeć wzdłuż przekątnej przestrzennej.

2. Sześcienny model o krawędzi 4 dm trzeba okleić ze wszystkich stron. Oblicz potrzebne pole folii.

Odpowiedź: 96 dm^2

Pole folii to suma pól sześciu ścian.

3. W modelu kryształu trzy punkty łączą przekątne trzech ścian sześcianu o krawędzi 4 mm. Oblicz pole otrzymanego trójkąta.

Odpowiedź: $8\sqrt{3}$ mm^2

Jest to równoboczny trójkąt o boku a√2 i polu $a^2\sqrt{3}/2$.

4. Sześcienny zbiornik modelowy ma objętość 64 cm^3. Odtwórz krawędź i pole jego ścian łącznie.

Odpowiedź: 4 cm; 96 cm^2

Pierwiastek sześcienny objętości daje krawędź. Następnie stosujemy $P=6a^2$.