# Klucz i wskazówki dla nauczyciela

**Symetria kwadratu i okrąg opisany**

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

## Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Odbicie względem Oy zmienia znak pierwszej współrzędnej: $A' = (3, 0)$, $C' = (-5, 6)$. Środek okręgu jest środkiem przekątnej: $S' = (-1, 3)$. Kwadrat promienia to jedna czwarta kwadratu długości przekątnej: $r^2 = \frac{(8)^2+(6)^2}{4} = 25$. Podstawiamy do wzoru $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2$ i otrzymujemy $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

**Odpowiedź:** $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

## 1 / Od schematu do wyzwania

**1.** A=(-4,-2), C=(8,14) to końce przekątnej kwadratu. Kwadrat odbito względem Oy. Wyznacz równanie okręgu opisanego na obrazie.

**Odpowiedź:** $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 100$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Środek oryginału to (k,3 k), a po odbiciu (−k,3 k). Przekątna ma długość 10 k, więc r=5 k. Podstawiamy do równania okręgu.

**2.** Okrąg o środku (2,-2) przechodzi przez P=(8,6). Wyznacz równanie obrazu w symetrii względem Ox.

**Odpowiedź:** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 100$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Kwadrat promienia wynosi (3 k)²+(4 k)²=25 k². Odbicie względem Ox zmienia środek na (k,k), nie zmieniając promienia.

**3.** Obraz okręgu w symetrii względem Oy ma równanie $(x+2)^2+(y-6)^2 = 100$. Odtwórz równanie okręgu pierwotnego i jego średnicę.

**Odpowiedź:** $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 100;\ d = 20$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Symetria jest odwrotna sama do siebie. Odbijamy środek (−k,3 k) z powrotem na (k,3 k). Promień wynosi 5 k, a średnica 10 k.

**4.** Okrąg ma środek (2,-2) i jest styczny do osi Ox. Wyznacz jego równanie i punkty przecięcia osi Oy.

**Odpowiedź:** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4;\ (0, -2)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Promień jest odległością środka od Ox, czyli k. Dla x=0 równanie daje (y+k)²=0; jedyny punkt to (0,-k).

**5.** Wykaż, że środki wszystkich okręgów przechodzących przez różne punkty A i B leżą na symetralnej AB.

**Odpowiedź:** Są jednakowo odległe od A i B.

Jeżeli S jest środkiem takiego okręgu, SA i SB są promieniami, zatem SA=SB. Zbiór punktów równoodległych od końców odcinka to jego symetralna.

**6.** A=(-2,0), B=(2,0). Wyznacz zbiór wszystkich punktów P spełniających $PA^2 + PB^2 = 16$ i uzasadnij jego kształt.

**Odpowiedź:** $x^2 + y^2 = 4$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Dla P=(x,y) suma kwadratów wynosi $(x + 2)^2 + y^2 + (x - 2)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 8$. Równość z 16 jest równoważna $x^2 + y^2 = 4$. To okrąg o środku (0,0) i promieniu k.

## 2 / Małe kroki

**1.** Okrąg ma środek (2,-2) i promień 10. Zapisz równanie.

**Odpowiedź:** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Stosujemy $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ z a=k,b=-k,r=5 k.

**2.** Środek okręgu to S=(2,-4). Odbij go względem Oy.

**Odpowiedź:** $(-2, -4)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej, a drugą pozostawiamy.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

## 3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

**Grupa A**

**1.** Okrąg: $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Podaj środek.

**Odpowiedź:** $(2, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

**2.** Okrąg: $x^2 + y^2 = 4$. Podaj promień.

**Odpowiedź:** $2$

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

**3.** Średnica ma długość 4. Podaj promień.

**Odpowiedź:** $2$

Promień jest połową średnicy.

**4.** Odbij punkt (2,-2) względem Oy.

**Odpowiedź:** $(-2, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

**Grupa B**

**1.** Okrąg: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Podaj środek.

**Odpowiedź:** $(3, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

**2.** Okrąg: $x^2 + y^2 = 9$. Podaj promień.

**Odpowiedź:** $3$

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

**3.** Średnica ma długość 6. Podaj promień.

**Odpowiedź:** $3$

Promień jest połową średnicy.

**4.** Odbij punkt (3,-2) względem Oy.

**Odpowiedź:** $(-3, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

**Grupa C**

**1.** Okrąg: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Podaj środek.

**Odpowiedź:** $(4, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

**2.** Okrąg: $x^2 + y^2 = 16$. Podaj promień.

**Odpowiedź:** $4$

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

**3.** Średnica ma długość 8. Podaj promień.

**Odpowiedź:** $4$

Promień jest połową średnicy.

**4.** Odbij punkt (4,-2) względem Oy.

**Odpowiedź:** $(-4, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

**Grupa D**

**1.** Okrąg: $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Podaj środek.

**Odpowiedź:** $(5, -2)$

Odczytujemy przeciwne znaki liczb w nawiasach.

**2.** Okrąg: $x^2 + y^2 = 25$. Podaj promień.

**Odpowiedź:** $5$

Pierwiastkujemy dodatnią prawą stronę.

**3.** Średnica ma długość 10. Podaj promień.

**Odpowiedź:** $5$

Promień jest połową średnicy.

**4.** Odbij punkt (5,-2) względem Oy.

**Odpowiedź:** $(-5, -2)$

Zmieniamy znak pierwszej współrzędnej.

## 4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

**Grupa A**

**1.** S=(2,-3), promień 2.

**Odpowiedź:** $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

W nawiasach odejmujemy współrzędne środka.

**2.** S=(0,0), promień 2.

**Odpowiedź:** $x^2+y^2=4$

Po prawej stronie musi być kwadrat promienia.

**3.** S=(2,-3), odbicie względem Oy.

**Odpowiedź:** $(-2, -3)$

Odbicie względem Oy zmienia x, a nie y.

**Grupa B**

**1.** S=(2,-3), promień 3.

**Odpowiedź:** $(x-2)^2+(y+3)^2=9$

W nawiasach odejmujemy współrzędne środka.

**2.** S=(0,0), promień 3.

**Odpowiedź:** $x^2+y^2=9$

Po prawej stronie musi być kwadrat promienia.

**3.** S=(2,-3), odbicie względem Oy.

**Odpowiedź:** $(-2, -3)$

Odbicie względem Oy zmienia x, a nie y.

## 5 / Matematyka w świecie

**1.** Okrągła rabata ma środek (2,-2) i promień 10 m na planie. Zapisz równanie jej brzegu.

**Odpowiedź:** $(x-2)^2+(y+2)^2=100$

Podstawiamy środek i kwadrat promienia do standardowego równania.

**2.** Końcami średnicy okrągłej tablicy są (-4,-2) i (8,14) dm. Oblicz pole powierzchni do pokrycia folią.

**Odpowiedź:** $100\pi$ dm$^2$

Przyjmijmy pomocniczo $k=2$. Średnica ma długość 10 k, promień 5 k, a pole 25πk².

**3.** Tor w płaskim modelu ma równanie $(x-2)^2+(y+2)^2=100$ w cm. Czy punkt (8,-10) leży na torze?

**Odpowiedź:** Tak.

Przyjmijmy pomocniczo $k=2$. Po podstawieniu kwadrat odległości od środka jest równy 25 k², tak jak prawa strona równania.

**4.** Brzeg okrągłego obszaru opisuje równanie $(x-2)^2+(y+2)^2=100$. Odtwórz środek i średnicę.

**Odpowiedź:** $S=(2,-2);\ d=20$

Środek odczytujemy z nawiasów. Promień jest pierwiastkiem prawej strony, a średnica jest dwa razy większa.