Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Trapez i dwusieczna kąta

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Oznaczmy $\alpha = \angle DAB$ i $b = CD$. Z dwusiecznej $\angle DAC = \angle CAB$, a z równoległości podstaw $\angle CAB = \angle ACD$. Trójkąt ADC jest więc równoramienny i $AD = CD = b$. Po opuszczeniu wysokości z D na AB odcinek przy A ma długość $\frac{AB-CD}{2} = \frac{(2)b-b}{2}$. W powstałym trójkącie prostokątnym $\cos\alpha = \frac{AB-CD}{2AD} = \frac{1}{2}$. Kąt przy dłuższej podstawie jest ostry, zatem $\alpha = 60°$.

Odpowiedź: $60°$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Trapez równoramienny ma podstawy 12, 4 i wysokość 6. Oblicz ramię.

Odpowiedź: $2\sqrt{13}$

Rzut ramienia to 4; Pitagoras daje $l = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$.

2. Trapez równoramienny ma podstawy 12, 4 i wysokość 6. Oblicz przekątną.

Odpowiedź: 10

Rzut przekątnej ma długość połowy sumy podstaw, czyli 8. Pitagoras: $d = \sqrt{64+36} = 10$.

3. Trapez równoramienny ma podstawy 12, 4 i ramię $2\sqrt{13}$. Oblicz pole.

Odpowiedź: 48

Rzut ramienia to 4. Wysokość: $\sqrt{52-16} = 6$. Pole to 48.

4. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 12, 4, a przekątna 10. Oblicz wysokość i ramię.

Odpowiedź: $6;\ 2\sqrt{13}$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Rzut przekątnej to 8, więc wysokość wynosi 6. Rzut ramienia to 4; jego długość to k√13.

5. Wykaż, że w trapezie równoramiennym o podstawach a,b, ramieniu l i przekątnej d zachodzi $d^2 = l^2 + ab$.

Odpowiedź: $d^2 = l^2 + ab$

Niech h oznacza wysokość. Mamy $d^2 = h^2 + (a+b)^2/4$ oraz $l^2 = h^2 + (a-b)^2/4$. Po odjęciu równań dostajemy $d^2 - l^2 = ((a+b)^2 - (a-b)^2)/4 = ab$.

6. Trapez równoramienny ABCD ma AB równoległe do CD i $AB = 2CD$. Przekątna AC dzieli kąt DAB na połowy. Wykaż, że ten kąt ma $60°$.

Odpowiedź: $60°$

Z dwusiecznej i równoległości podstaw mamy $DAC = CAB = ACD$, więc $AD = CD = b$. Rzut ramienia AD na AB ma długość $(AB - CD)/2 = b/2$. Cosinus kąta DAB wynosi więc $(b/2)/b = 1/2$. Kąt przy dłuższej podstawie jest ostry, zatem ma 60 stopni.

2 / Małe kroki

1. Trapez równoramienny ma podstawy 12 i 4. Oblicz poziomy rzut każdego ramienia na dłuższą podstawę.

Odpowiedź: 4

Połowa różnicy podstaw: $(12-4)/2 = 4$.

2. Trapez ma podstawy 12, 4 i wysokość 6. Oblicz pole.

Odpowiedź: 48

$P = (12+4)\cdot 6/2 = 48$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Podstawy trapezu: 8, 4; wysokość: 2. Oblicz pole.

Odpowiedź: 12

Pole to połowa sumy podstaw razy wysokość.

2. W trapezie równoramiennym podstawy mają 12 i 4. Oblicz rzut ramienia.

Odpowiedź: 4

Połowa różnicy podstaw wynosi 2 t.

3. W tym samym trapezie oblicz rzut przekątnej.

Odpowiedź: 8

Połowa sumy podstaw wynosi 4 t.

4. Wysokość to 6, rzut przekątnej 8. Oblicz przekątną.

Odpowiedź: 10

Jest to trójkąt prostokątny o bokach w proporcji 3:4:5.

Grupa B

1. Podstawy trapezu: 12, 6; wysokość: 3. Oblicz pole.

Odpowiedź: 27

Pole to połowa sumy podstaw razy wysokość.

2. W trapezie równoramiennym podstawy mają 18 i 6. Oblicz rzut ramienia.

Odpowiedź: 6

Połowa różnicy podstaw wynosi 2 t.

3. W tym samym trapezie oblicz rzut przekątnej.

Odpowiedź: 12

Połowa sumy podstaw wynosi 4 t.

4. Wysokość to 9, rzut przekątnej 12. Oblicz przekątną.

Odpowiedź: 15

Jest to trójkąt prostokątny o bokach w proporcji 3:4:5.

Grupa C

1. Podstawy trapezu: 16, 8; wysokość: 4. Oblicz pole.

Odpowiedź: 48

Pole to połowa sumy podstaw razy wysokość.

2. W trapezie równoramiennym podstawy mają 24 i 8. Oblicz rzut ramienia.

Odpowiedź: 8

Połowa różnicy podstaw wynosi 2 t.

3. W tym samym trapezie oblicz rzut przekątnej.

Odpowiedź: 16

Połowa sumy podstaw wynosi 4 t.

4. Wysokość to 12, rzut przekątnej 16. Oblicz przekątną.

Odpowiedź: 20

Jest to trójkąt prostokątny o bokach w proporcji 3:4:5.

Grupa D

1. Podstawy trapezu: 20, 10; wysokość: 5. Oblicz pole.

Odpowiedź: 75

Pole to połowa sumy podstaw razy wysokość.

2. W trapezie równoramiennym podstawy mają 30 i 10. Oblicz rzut ramienia.

Odpowiedź: 10

Połowa różnicy podstaw wynosi 2 t.

3. W tym samym trapezie oblicz rzut przekątnej.

Odpowiedź: 20

Połowa sumy podstaw wynosi 4 t.

4. Wysokość to 15, rzut przekątnej 20. Oblicz przekątną.

Odpowiedź: 25

Jest to trójkąt prostokątny o bokach w proporcji 3:4:5.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Podstawy równoramiennego trapezu: 12, 4.

Odpowiedź: 4

Trzeba wziąć połowę różnicy, a nie połowę sumy podstaw.

2. Podstawy: 12, 4; wysokość 6.

Odpowiedź: 48

Pominięto dzielenie sumy podstaw przez 2.

3. Rzut przekątnej to 8, wysokość 6.

Odpowiedź: 10

Prostopadłych odcinków nie dodajemy; stosujemy twierdzenie Pitagorasa.

Grupa B

1. Podstawy równoramiennego trapezu: 18, 6.

Odpowiedź: 6

Trzeba wziąć połowę różnicy, a nie połowę sumy podstaw.

2. Podstawy: 18, 6; wysokość 9.

Odpowiedź: 108

Pominięto dzielenie sumy podstaw przez 2.

3. Rzut przekątnej to 12, wysokość 9.

Odpowiedź: 15

Prostopadłych odcinków nie dodajemy; stosujemy twierdzenie Pitagorasa.

5 / Matematyka w świecie

1. Trapezowy ogród równoramienny ma podstawy 12, 4 m i szerokość 6 m. Oblicz powierzchnię.

Odpowiedź: 48 m^2

Stosujemy pole trapezu: połowa sumy podstaw razy wysokość.

2. Trapezową tablicę o podstawach 12, 4 dm i wysokości 6 dm trzeba wzmocnić przekątną. Ile dm listwy wymaga jedno wzmocnienie?

Odpowiedź: 10 dm

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Rzut przekątnej to 4 k, wysokość 3 k, a długość przekątnej 5 k.

3. Przekrój umownego kanału ma kształt trapezu o podstawach 12, 4 cm i wysokości 6 cm. Oblicz pole przekroju.

Odpowiedź: 48 cm^2

Pole przekroju obliczamy wzorem na pole trapezu.

4. Trapez ma podstawy 12, 4 m oraz pole 48 m². Odtwórz wysokość.

Odpowiedź: 6 m

$h = 2P/(a+b) = 96/16 = 6$ m.