Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Środki okręgów w trójkącie

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Środek okręgu wpisanego jest jednakowo odległy od trzech boków. Punkty jednakowo odległe od ramion kąta leżą na jego dwusiecznej. Dlatego środek leży na dwusiecznych kątów trójkąta.

Odpowiedź: A

1 / Od schematu do wyzwania

1. Trójkąt prostokątny ma przyprostokątne 6 i 8. Oblicz promień okręgu opisanego.

Odpowiedź: 5

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Przeciwprostokątna wynosi 5 k, a środek okręgu opisanego jest jej środkiem. Promień to połowa przeciwprostokątnej.

2. Trójkąt ma boki 6, 8, 10. Oblicz promień okręgu wpisanego.

Odpowiedź: 2

Pole wynosi 24, a połowa obwodu 12. Ze wzoru $P = rs$ mamy $r = 24/12 = 2$.

3. I jest środkiem okręgu wpisanego, a $\angle BIC = 110^\circ$. Odtwórz kąt A.

Odpowiedź: 40°

Z równości $\angle BIC = 90^\circ + A/2$ wyznaczamy A przez odjęcie 90 i pomnożenie przez 2.

4. Trójkąt równoboczny ma bok $4\sqrt{3}$. Oblicz odległość między środkiem okręgu wpisanego a wierzchołkiem.

Odpowiedź: 4

Wysokość to 6. Wspólny środek dzieli wysokość w stosunku 2:1 licząc od wierzchołka, więc odległość wynosi 4.

5. Wykaż, że dla środka I okręgu wpisanego w trójkąt ABC zachodzi $\angle BIC = 90^\circ + A/2$.

Odpowiedź: $90^\circ + A/2$

Dwusieczne dają kąty IBC=B/2 i ICB=C/2. W trójkącie BIC mamy kąt przy I równy $180^\circ - (B + C)/2$. Ponieważ B+C=180 stopni minus A, otrzymujemy tezę.

6. W trójkącie ABC kąt A ma 60°. I jest środkiem okręgu wpisanego, a J przecięciem zewnętrznych dwusiecznych kątów B i C. Oblicz BIC i BJC oraz uzasadnij.

Odpowiedź: $120^\circ;\ 60^\circ$

Wewnętrzne dwusieczne dają $BIC = 90^\circ + A/2 = 120^\circ$. W trójkącie BJC kąty przy B i C mają miary $90^\circ - B/2$ i $90^\circ - C/2$. Pozostały kąt to $(B + C)/2 = 90^\circ - A/2 = 60^\circ$.

2 / Małe kroki

1. Które proste przecinają się w środku okręgu wpisanego w trójkąt?

Odpowiedź: Dwusieczne kątów.

Punkt jednakowo odległy od boków kąta leży na jego dwusiecznej. Środek okręgu wpisanego jest jednakowo odległy od trzech boków.

2. Kąt A trójkąta ma 40°. I jest środkiem okręgu wpisanego. Oblicz $\angle BIC$.

Odpowiedź: 110°

Kąty IBC i ICB są połowami B i C. Z sumy kątów otrzymujemy $\angle BIC = 180^\circ - (180^\circ - 40^\circ)/2 = 110^\circ$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. I to środek wpisanego, a A ma 30°. Oblicz BIC.

Odpowiedź: 105°

Stosujemy $BIC = 90^\circ + A/2$.

2. Przeciwprostokątna ma długość 4. Oblicz promień okręgu opisanego.

Odpowiedź: 2

Promień jest połową przeciwprostokątnej.

3. Pole trójkąta to 12, a połowa obwodu 6. Oblicz r.

Odpowiedź: 2

Z $P = rs$ mamy $r = P/s$.

4. Jaki rodzaj prostych wyznacza środek okręgu opisanego?

Odpowiedź: Symetralne boków.

Ich punkty są jednakowo odległe od końców boków, czyli od wierzchołków.

Grupa B

1. I to środek wpisanego, a A ma $40°$. Oblicz BIC.

Odpowiedź: $110°$

Stosujemy $BIC = 90° + A/2$.

2. Przeciwprostokątna ma długość 6. Oblicz promień okręgu opisanego.

Odpowiedź: 3

Promień jest połową przeciwprostokątnej.

3. Pole trójkąta to 18, a połowa obwodu 6. Oblicz r.

Odpowiedź: 3

Z $P = rs$ mamy $r = P/s$.

4. Jaki rodzaj prostych wyznacza środek okręgu opisanego?

Odpowiedź: Symetralne boków.

Ich punkty są jednakowo odległe od końców boków, czyli od wierzchołków.

Grupa C

1. I to środek wpisanego, a A ma $50°$. Oblicz BIC.

Odpowiedź: $115°$

Stosujemy $BIC = 90° + A/2$.

2. Przeciwprostokątna ma długość 8. Oblicz promień okręgu opisanego.

Odpowiedź: 4

Promień jest połową przeciwprostokątnej.

3. Pole trójkąta to 24, a połowa obwodu 6. Oblicz r.

Odpowiedź: 4

Z $P = rs$ mamy $r = P/s$.

4. Jaki rodzaj prostych wyznacza środek okręgu opisanego?

Odpowiedź: Symetralne boków.

Ich punkty są jednakowo odległe od końców boków, czyli od wierzchołków.

Grupa D

1. I to środek wpisanego, a A ma $60°$. Oblicz BIC.

Odpowiedź: $120°$

Stosujemy $BIC = 90° + A/2$.

2. Przeciwprostokątna ma długość 10. Oblicz promień okręgu opisanego.

Odpowiedź: 5

Promień jest połową przeciwprostokątnej.

3. Pole trójkąta to 30, a połowa obwodu 6. Oblicz r.

Odpowiedź: 5

Z $P = rs$ mamy $r = P/s$.

4. Jaki rodzaj prostych wyznacza środek okręgu opisanego?

Odpowiedź: Symetralne boków.

Ich punkty są jednakowo odległe od końców boków, czyli od wierzchołków.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Uczeń szuka środka okręgu wpisanego.

Odpowiedź: Trzeba przeciąć dwusieczne kątów.

Symetralne wyznaczają środek okręgu opisanego, a nie wpisanego.

2. I to środek wpisanego, a kąt A ma $40°$.

Odpowiedź: $110°$

Pominięto 90 stopni w tożsamości dla kąta przy środku okręgu wpisanego.

3. Przeciwprostokątna ma długość 4.

Odpowiedź: 2

Przeciwprostokątna jest średnicą, a nie promieniem.

Grupa B

1. Uczeń szuka środka okręgu wpisanego.

Odpowiedź: Trzeba przeciąć dwusieczne kątów.

Symetralne wyznaczają środek okręgu opisanego, a nie wpisanego.

2. I to środek wpisanego, a kąt A ma $50°$.

Odpowiedź: $115°$

Pominięto 90 stopni w tożsamości dla kąta przy środku okręgu wpisanego.

3. Przeciwprostokątna ma długość 5.

Odpowiedź: $\frac{5}{2}$

Przeciwprostokątna jest średnicą, a nie promieniem.

5 / Matematyka w świecie

1. Trójkątna wyspa ma kształt trójkąta o bokach 6, 8, 10 m. Jakie największe koło zmieści się wewnątrz i dotknie wszystkich boków? Podaj promień.

Odpowiedź: 2 m

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. To koło wpisane. Promień obliczamy ze wzoru $r = P/s = k$.

2. Okrągły blat ma pomieścić trójkątną wkładkę prostokątną o przyprostokątnych 6, 8 dm. Jaka jest najmniejsza średnica blatu obejmującego wierzchołki?

Odpowiedź: 10 dm

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Okrąg opisany na prostokątnym trójkącie ma za średnicę przeciwprostokątną 5 k.

3. W modelu trójkątnego preparatu pole to 24 mm², a połowa obwodu 12 mm. Oblicz promień wpisanego koła.

Odpowiedź: 2 mm

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. $r = P/s$ daje k mm.

4. Okrągły obrys prostokątnej trójkątnej wkładki ma promień 10 dm. Jedna przyprostokątna ma 12 dm. Odtwórz drugą.

Odpowiedź: 16 dm

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Przeciwprostokątna jest średnicą 10 k. Pitagoras daje $\sqrt{100k^2 - 36k^2} = 8k$.