# Klucz i wskazówki dla nauczyciela

**Iloraz ciągu geometrycznego**

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

## Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Mamy $a_8 = a_6 q^2$. W malejącym ciągu geometrycznym wyraz $a_6$ jest niezerowy, więc skracamy go w równaniu $a_6 = 25 a_6 q^2$. Otrzymujemy $q^2 = \frac{1}{25}$. Ujemny iloraz zmieniałby znaki kolejnych wyrazów i wykluczał monotoniczność. Zatem $q = \frac{1}{5}$. Odpowiedź: A.

**Odpowiedź:** A

## 1 / Od schematu do wyzwania

**1.** $a_1 = 2, q = -2$. Oblicz $a_5$ i określ znak $a_6$.

**Odpowiedź:** $a_5 = 32$; $a_6$ ujemny.

$a_5 = 2(-2)^4 = 32$. Potęga ilorazu przy $a_6$ ma nieparzysty wykładnik 5.

**2.** $a_2 = 4, a_4 = 16$ oraz q>0. Wyznacz q i $a_1$.

**Odpowiedź:** $q = 2, a_1 = 2$

Iloraz $a_4/a_2 = q^2 = 4$, więc q=2. Następnie $a_1 = a_2/q = 2$.

**3.** W dodatnim ciągu geometrycznym $a_3 = 2$. Oblicz iloczyn $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.

**Odpowiedź:** 32

Wyrazy symetryczne spełniają $a_1 a_5 = a_3^2$ i $a_2 a_4 = a_3^2$. Cały iloczyn to $a_3^5 = 32$.

**4.** $a_1 = 2, q = 2$. Wyznacz n, jeśli $a_n = 64$.

**Odpowiedź:** $n = 6$

$2 \cdot 2^{n-1} = 64$, więc $2^{n-1} = 32 = 2^5$ i n=6.

**5.** Wykaż, że dla trzech dodatnich kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego zachodzi $a_1 + a_3 \geq 2a_2$. Ustal równość.

**Odpowiedź:** Równość dokładnie dla q=1.

$a_1 + a_3 - 2a_2 = a_1(1 + q^2 - 2q) = a_1(q-1)^2 \geq 0$. Ponieważ $a_1 > 0$, równość wymaga q=1.

**6.** Znajdź wszystkie rosnące trójki dodatnich liczb całkowitych tworzących ciąg geometryczny, którego środkowy wyraz wynosi 6.

**Odpowiedź:** $(1, 6, 36)$, $(2, 6, 18)$, $(3, 6, 12)$, $(4, 6, 9)$

Dla trójki (u,6,w) mamy $uw = 36$. Wybieramy wszystkie dodatnie dzielniki u liczby 36 mniejsze od 6; wtedy $w = 36/u > 6$. To daje dokładnie wypisane trójki.

## 2 / Małe kroki

**1.** $a_1 = 2, q = 2$. Oblicz $a_3$.

**Odpowiedź:** 8

$a_3 = 2 \cdot 2^2 = 8$.

**2.** $a_1 = 2, a_2 = 6$. Podaj iloraz.

**Odpowiedź:** 3

$q = 6/2 = 3$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

## 3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

**Grupa A**

**1.** $a_1 = 2, q = 2$. Oblicz $a_2$.

**Odpowiedź:** 4

$a_2 = a_1 q = 4$.

**2.** Początek: 2, 4, 8. Podaj iloraz.

**Odpowiedź:** 2

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

**3.** $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz $a_1$.

**Odpowiedź:** $2$

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

**4.** $a_1 = 2, q = -1$. Oblicz $a_3$.

**Odpowiedź:** $2$

Trzeci wyraz to $a_1$ razy $(-1)^2$, czyli $a_1$.

**Grupa B**

**1.** $a_1 = 3, q = 3$. Oblicz $a_2$.

**Odpowiedź:** $9$

$a_2 = a_1 q = 9$.

**2.** Początek: $3, 9, 27$. Podaj iloraz.

**Odpowiedź:** $3$

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

**3.** $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz $a_1$.

**Odpowiedź:** $3$

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

**4.** $a_1 = 3, q = -1$. Oblicz $a_3$.

**Odpowiedź:** $3$

Trzeci wyraz to $a_1$ razy $(-1)^2$, czyli $a_1$.

**Grupa C**

**1.** $a_1 = 4, q = 4$. Oblicz $a_2$.

**Odpowiedź:** $16$

$a_2 = a_1 q = 16$.

**2.** Początek: $4, 16, 64$. Podaj iloraz.

**Odpowiedź:** $4$

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

**3.** $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz $a_1$.

**Odpowiedź:** $4$

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

**4.** $a_1 = 4, q = -1$. Oblicz $a_3$.

**Odpowiedź:** $4$

Trzeci wyraz to $a_1$ razy $(-1)^2$, czyli $a_1$.

**Grupa D**

**1.** $a_1 = 5, q = 5$. Oblicz $a_2$.

**Odpowiedź:** $25$

$a_2 = a_1 q = 25$.

**2.** Początek: $5, 25, 125$. Podaj iloraz.

**Odpowiedź:** $5$

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

**3.** $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$. Oblicz $a_1$.

**Odpowiedź:** $5$

Dla n=1 wykładnik jest zerowy.

**4.** $a_1 = 5, q = -1$. Oblicz $a_3$.

**Odpowiedź:** $5$

Trzeci wyraz to $a_1$ razy $(-1)^2$, czyli $a_1$.

## 4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

**Grupa A**

**1.** $a_1 = 2, q = 2$. Uczeń liczy $a_4$.

**Odpowiedź:** $a_4 = 16$

Od $a_1$ do $a_4$ wykonujemy trzy mnożenia przez q, więc wykładnik wynosi 3.

**2.** $a_1 = 2, a_2 = 4$. Wyznaczono iloraz.

**Odpowiedź:** $q = 2$

Odwrócono iloraz. Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy, nie pierwszy przez drugi.

**3.** $a_1 = 2, q = -2$. Obliczono $a_2$.

**Odpowiedź:** $a_2 = -4$

Przy mnożeniu dodatniego wyrazu przez ujemny iloraz wynik jest ujemny.

**Grupa B**

**1.** $a_1 = 3, q = 3$. Uczeń liczy $a_4$.

**Odpowiedź:** $a_4 = 81$

Od $a_1$ do $a_4$ wykonujemy trzy mnożenia przez q, więc wykładnik wynosi 3.

**2.** $a_1 = 3, a_2 = 9$. Wyznaczono iloraz.

**Odpowiedź:** $q = 3$

Odwrócono iloraz. Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy, nie pierwszy przez drugi.

**3.** $a_1 = 3, q = -2$. Obliczono $a_2$.

**Odpowiedź:** $a_2 = -6$

Przy mnożeniu dodatniego wyrazu przez ujemny iloraz wynik jest ujemny.

## 5 / Matematyka w świecie

**1.** Warstwy konstrukcji mają kolejno $4, 8, 16, \ldots$ elementów. Ile ma piąta warstwa w tym modelu?

**Odpowiedź:** $64$

$a_5 = 4 \cdot 2^4 = 64$.

**2.** Umowny kapitał 400 zł co okres mnoży się przez 2. Jaki jest po trzech okresach? Pomijamy podatki.

**Odpowiedź:** 3200 zł

Wykonujemy trzy mnożenia: $400 \cdot 2^3 = 3200$.

**3.** W uproszczonym modelu populacja zaczyna od 4 jednostek i podwaja się co etap. Ile będzie po czterech etapach?

**Odpowiedź:** $64$

Po czterech mnożeniach liczebność wynosi $4 \cdot 2^4 = 64$.

**4.** Dodatni ciąg geometryczny ma $a_1 = 4$ i $a_3 = 36$. Odtwórz dodatni iloraz q.

**Odpowiedź:** $3$

$a_3 = a_1 q^2$ daje $q^2=9$. Przy $q>0$ otrzymujemy $q=3$.