Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Suma ciągu danego rekurencyjnie

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

W każdym kroku dodajemy 2, więc ciąg jest arytmetyczny o różnicy 2. Ostatni sumowany wyraz to $a_{100} = 5 + (100 - 1) \cdot 2 = 203$. Stosujemy wzór $S_{100} = \frac{100(5+203)}{2} = 10400$. Odpowiedź: C.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. W ciągu arytmetycznym $a_2 = 7, a_7 = 22$. Wyznacz a_1 i różnicę.

Odpowiedź: $a_1 = 4, d = 3$

Odejmujemy: $5d = 15$. Pierwszy wyraz to $a_2 - d = 4$.

2. $a_1 = 4, d = 3$. Oblicz sumę dziesięciu pierwszych wyrazów.

Odpowiedź: 175

$a_{10} = 31$. Suma $10(4 + 31)/2 = 175$.

3. $a_n = 4 + (n - 1)3$. Którym wyrazem jest liczba 28?

Odpowiedź: $n = 9$

Równanie $4 + (n - 1)3 = 28$ daje n-1=8.

4. Suma pierwszych n wyrazów ciągu $3, 6, 9, \ldots$ wynosi 45. Wyznacz naturalne n.

Odpowiedź: $n = 5$

$dn(n + 1)/2 = 45$, więc $n^2 + n - 30 = 0$. Pierwiastki to 5 i -6; tylko 5 jest naturalne.

5. Wykaż, że w dowolnym ciągu arytmetycznym suma pięciu kolejnych wyrazów jest pięciokrotnością środkowego.

Odpowiedź: Suma wynosi 5 razy środkowy wyraz.

Zapisujemy wyrazy jako b-2 d,b-d,b,b+d,b+2 d. Po dodaniu składniki zawierające d znoszą się i zostaje 5 b.

6. Znajdź wszystkie rosnące ciągi arytmetyczne dodatnich liczb całkowitych, które mają co najmniej trzy wyrazy i sumę 17. Podaj pierwszy wyraz, różnicę i długość.

Odpowiedź: (a_1,d,n):

Ze wzoru na sumę: $2 \cdot 17 = n(2a_1 + (n - 1)d)$. Ponieważ $a_1, d \geq 1$, musi być $n(n + 1)/2 \leq 17$. Dla każdej tak ograniczonej długości sprawdzamy dodatnie całkowite d i a_1; otrzymujemy dokładnie trójki .

2 / Małe kroki

1. $a_1 = 4, d = 3$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 10

Trzeci wyraz jest o dwie różnice większy od pierwszego.

2. Oblicz różnicę ciągu zaczynającego się od $4, 7, 10$.

Odpowiedź: 3

Różnica dwóch kolejnych wyrazów jest stała.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $a_1 = 4, d = 2$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 6

Dodajemy różnicę: $a_2 = 4 + 2 = 6$.

2. Początek ciągu: $4, 6, 8$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 2n + 4$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 6

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -2 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa B

1. $a_1 = 5, d = 3$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 8

Dodajemy różnicę: $a_2 = 5 + 3 = 8$.

2. Początek ciągu: $5, 8, 11$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 3

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 3n + 5$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 8

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -3 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa C

1. $a_1 = 6, d = 4$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 10

Dodajemy różnicę: $a_2 = 6 + 4 = 10$.

2. Początek ciągu: $6, 10, 14$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 4

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 4n + 6$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 10

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -4 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa D

1. $a_1 = 7, d = 5$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 12

Dodajemy różnicę: $a_2 = 7 + 5 = 12$.

2. Początek ciągu: $7, 12, 17$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 5

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 5n + 7$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 12

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -5 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $a_1 = 4, d = 2$. Uczeń oblicza a_5.

Odpowiedź: $a_5 = 12$

Od pierwszego do piątego wyrazu są cztery, nie pięć przyrostów.

2. $a_1 = 4, a_5 = 12$. Uczeń wyznacza różnicę.

Odpowiedź: $d = 2$

Różnicę wyrazów należy podzielić przez różnicę indeksów, czyli 4.

3. $a_1 = 4, a_4 = 10$. Obliczono S_4.

Odpowiedź: $S_4 = 28$

We wzorze $n(a_1+a_n)/2$ pominięto dzielenie przez 2.

Grupa B

1. $a_1 = 5, d = 3$. Uczeń oblicza a_5.

Odpowiedź: $a_5 = 17$

Od pierwszego do piątego wyrazu są cztery, nie pięć przyrostów.

2. $a_1 = 5, a_5 = 17$. Uczeń wyznacza różnicę.

Odpowiedź: $d = 3$

Różnicę wyrazów należy podzielić przez różnicę indeksów, czyli 4.

3. $a_1 = 5, a_4 = 14$. Obliczono S_4.

Odpowiedź: $S_4 = 38$

We wzorze $n(a_1+a_n)/2$ pominięto dzielenie przez 2.

5 / Matematyka w świecie

1. W pierwszym rzędzie jest 6 miejsc, a w każdym następnym o 3 więcej. Ile miejsc ma dziesiąty rząd?

Odpowiedź: 33

$a_{10} = 6 + 9 \cdot 3 = 33$.

2. W symulacji odkładasz 6 zł pierwszego dnia i codziennie o 3 zł więcej. Ile odłożysz przez 5 dni?

Odpowiedź: 60 zł

Piąta wpłata to 18. Suma $5(6 + 18)/2 = 60$.

3. W modelu pomiarowym odczyty co minutę to $6, 9, 12, \ldots$ mm. Przy stałym przyroście jaki będzie szósty odczyt?

Odpowiedź: 21 mm

Szósty odczyt jest o pięć różnic większy od pierwszego: $6 + 5 \cdot 3 = 21$.

4. Raport podaje $a_2 = 9$ oraz $a_5 = 18$ ciągu arytmetycznego. Odtwórz a_1 i d.

Odpowiedź: $a_1 = 6,\ d = 3$

Odejmujemy wyrazy: $3d = 9$. Następnie od a_2 odejmujemy jedną różnicę.