Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Warunek ciągu arytmetycznego

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Najpierw $a_5 = \frac{3\cdot5+9}{6} = 4$. W ciągu arytmetycznym podwojony środkowy wyraz jest sumą skrajnych, więc $4x^2 = 4 + 3x^2 + 5$. Stąd $x^2 = 9$ i $x = -3$ lub $x = 3$. Obie wartości spełniają warunek.

Odpowiedź: $x \in \{-3, 3\}$

1 / Od schematu do wyzwania

1. W ciągu arytmetycznym $a_2 = 5, a_7 = 15$. Wyznacz a_1 i różnicę.

Odpowiedź: $a_1 = 3, d = 2$

Odejmujemy: $5d = 10$. Pierwszy wyraz to $a_2 - d = 3$.

2. $a_1 = 3, d = 2$. Oblicz sumę dziesięciu pierwszych wyrazów.

Odpowiedź: 120

$a_{10} = 21$. Suma $10(3 + 21)/2 = 120$.

3. $a_n = 3 + (n - 1)2$. Którym wyrazem jest liczba 19?

Odpowiedź: $n = 9$

Równanie $3 + (n - 1)2 = 19$ daje n-1=8.

4. Suma pierwszych n wyrazów ciągu $2, 4, 6, \ldots$ wynosi 30. Wyznacz naturalne n.

Odpowiedź: $n = 5$

$dn(n + 1)/2 = 30$, więc $n^2 + n - 30 = 0$. Pierwiastki to 5 i -6; tylko 5 jest naturalne.

5. Wykaż, że w dowolnym ciągu arytmetycznym suma pięciu kolejnych wyrazów jest pięciokrotnością środkowego.

Odpowiedź: Suma wynosi 5 razy środkowy wyraz.

Zapisujemy wyrazy jako b-2 d,b-d,b,b+d,b+2 d. Po dodaniu składniki zawierające d znoszą się i zostaje 5 b.

6. Znajdź wszystkie rosnące ciągi arytmetyczne dodatnich liczb całkowitych, które mają co najmniej trzy wyrazy i sumę 15. Podaj pierwszy wyraz, różnicę i długość.

Odpowiedź: (a_1,d,n): $(4, 1, 3)$, $(3, 2, 3)$, $(2, 3, 3)$, $(1, 4, 3)$, $(1, 1, 5)$

Ze wzoru na sumę: $2 \cdot 15 = n(2a_1 + (n - 1)d)$. Ponieważ $a_1, d \geq 1$, musi być $n(n + 1)/2 \leq 15$. Dla każdej tak ograniczonej długości sprawdzamy dodatnie całkowite d i a_1; otrzymujemy dokładnie trójki (4, 1, 3), (3, 2, 3), (2, 3, 3), (1, 4, 3), (1, 1, 5).

2 / Małe kroki

1. $a_1 = 3, d = 2$. Oblicz a_3.

Odpowiedź: 7

Trzeci wyraz jest o dwie różnice większy od pierwszego.

2. Oblicz różnicę ciągu zaczynającego się od $3, 5, 7$.

Odpowiedź: 2

Różnica dwóch kolejnych wyrazów jest stała.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $a_1 = 3, d = 2$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 5

Dodajemy różnicę: $a_2 = 3 + 2 = 5$.

2. Początek ciągu: $3, 5, 7$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 2n + 3$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 5

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -2 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa B

1. $a_1 = 4, d = 3$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 7

Dodajemy różnicę: $a_2 = 4 + 3 = 7$.

2. Początek ciągu: $4, 7, 10$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 3

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 3n + 4$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 7

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -3 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa C

1. $a_1 = 5, d = 4$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 9

Dodajemy różnicę: $a_2 = 5 + 4 = 9$.

2. Początek ciągu: $5, 9, 13$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 4

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 4n + 5$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 9

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -4 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

Grupa D

1. $a_1 = 6, d = 5$. Oblicz a_2.

Odpowiedź: 11

Dodajemy różnicę: $a_2 = 6 + 5 = 11$.

2. Początek ciągu: $6, 11, 16$. Podaj różnicę.

Odpowiedź: 5

Odejmujemy dwa kolejne wyrazy.

3. $a_n = 5n + 6$. Oblicz a_1.

Odpowiedź: 11

Podstawiamy n=1.

4. Czy ciąg o różnicy -5 rośnie?

Odpowiedź: Nie, maleje.

Każdy kolejny wyraz jest mniejszy o dodatnią liczbę d.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $a_1 = 3, d = 2$. Uczeń oblicza a_5.

Odpowiedź: $a_5 = 11$

Od pierwszego do piątego wyrazu są cztery, nie pięć przyrostów.

2. $a_1 = 3, a_5 = 11$. Uczeń wyznacza różnicę.

Odpowiedź: $d = 2$

Różnicę wyrazów należy podzielić przez różnicę indeksów, czyli 4.

3. $a_1 = 3, a_4 = 9$. Obliczono S_4.

Odpowiedź: $S_4 = 24$

We wzorze $n(a_1+a_n)/2$ pominięto dzielenie przez 2.

Grupa B

1. $a_1 = 4, d = 3$. Uczeń oblicza a_5.

Odpowiedź: $a_5 = 16$

Od pierwszego do piątego wyrazu są cztery, nie pięć przyrostów.

2. $a_1 = 4, a_5 = 16$. Uczeń wyznacza różnicę.

Odpowiedź: $d = 3$

Różnicę wyrazów należy podzielić przez różnicę indeksów, czyli 4.

3. $a_1 = 4, a_4 = 13$. Obliczono S_4.

Odpowiedź: $S_4 = 34$

We wzorze $n(a_1+a_n)/2$ pominięto dzielenie przez 2.

5 / Matematyka w świecie

1. W pierwszym rzędzie jest 5 miejsc, a w każdym następnym o 2 więcej. Ile miejsc ma dziesiąty rząd?

Odpowiedź: 23

$a_{10} = 5 + 9 \cdot 2 = 23$.

2. W symulacji odkładasz 5 zł pierwszego dnia i codziennie o 2 zł więcej. Ile odłożysz przez 5 dni?

Odpowiedź: 45 zł

Piąta wpłata to 13. Suma $5(5 + 13)/2 = 45$.

3. W modelu pomiarowym odczyty co minutę to $5, 7, 9, \ldots$ mm. Przy stałym przyroście jaki będzie szósty odczyt?

Odpowiedź: 15 mm

Szósty odczyt jest o pięć różnic większy od pierwszego: $5 + 5 \cdot 2 = 15$.

4. Raport podaje $a_2 = 7$ oraz $a_5 = 13$ ciągu arytmetycznego. Odtwórz a_1 i d.

Odpowiedź: $a_1 = 5,\ d = 2$

Odejmujemy wyrazy: $3d = 6$. Następnie od a_2 odejmujemy jedną różnicę.