Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Pole trójkąta pod parabolą

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Współrzędna wierzchołka to $p = -\frac{40}{2\cdot(-16)} = \frac{5}{4}$, a $f(p) = 36$. Zatem $C = (\frac{5}{4}, 36)$ i $f(x) = -16(x - \frac{5}{4})^2 + 36$. Równanie $f(x) = 0$ daje $(x - \frac{5}{4})^2 = \frac{9}{4}$, więc miejsca zerowe wynoszą $-\frac{1}{4}$ i $\frac{11}{4}$. Podstawa AB ma długość 3, a wysokość to 36. Pole wynosi $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 36 = 54$.

Odpowiedź: 54

1 / Od schematu do wyzwania

1. Parabola $y = -(x - 1)^2 + 4$ przecina Ox w A,B i ma wierzchołek C. Oblicz pole ABC.

Odpowiedź: 8

Zera to $-1, 3$, więc AB=4. Wysokość wynosi 4; pole $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

2. Dla paraboli $y = -2(x - 1)^2 + 8$ oblicz pole trójkąta utworzonego przez jej zera i wierzchołek.

Odpowiedź: 16

Zera są odległe od osi symetrii o 2, więc podstawa wynosi 4, wysokość 8, pole 16.

3. Parabola ma zera $-1, 3$ i przechodzi przez $(1, 6)$. Oblicz pole trójkąta zer i wierzchołka.

Odpowiedź: 12

Wierzchołek ma argument będący środkiem zer, czyli 1. Podstawa 4 i wysokość 6 dają pole 12.

4. $f(x) = -a(x - 1)^2 + 4a$, gdzie a>0. Dla jakiego a pole trójkąta zer i wierzchołka wynosi 24?

Odpowiedź: 3

Zera nie zależą od a i są odległe o 4. Wysokość to 4 a, zatem pole 8 a. Rozwiązanie 8 a=24 daje a=3.

5. Wykaż, że przesunięcie wykresu paraboli w kierunku osi Ox nie zmienia pola trójkąta utworzonego przez jej zera i wierzchołek.

Odpowiedź: Pole pozostaje takie samo.

Oba zera i argument wierzchołka przesuwają się o tę samą liczbę. Długość podstawy oraz druga współrzędna wierzchołka nie zmieniają się, więc nie zmienia się ich połowa iloczynu.

6. Dla dodatnich całkowitych a,k parabola $y = -a(x - 1)^2 + ak^2$ tworzy z zerami i wierzchołkiem trójkąt o polu 216. Wyznacz wszystkie pary (a,k).

Odpowiedź: $(216, 1), (27, 2), (8, 3), (1, 6)$

Podstawa wynosi 2 k, wysokośćak², zatem poleak³. Musi zachodzić ak³=216=2³3³. Stąd k może być tylko 1,2,3,6; odpowiadające wartości a to 216,27,8,1.

2 / Małe kroki

1. Zera paraboli to $-1, 3$. Oblicz długość AB.

Odpowiedź: 4

Odejmujemy współrzędne zer.

2. Trójkąt ma podstawę 4 i wysokość 5. Oblicz pole.

Odpowiedź: 10

Połowa iloczynu podstawy i wysokości daje 10.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Zera paraboli to -2 i 2. Oblicz odległość między nimi.

Odpowiedź: 4

Od dodatniej współrzędnej odejmujemy ujemną.

2. Wierzchołek to $(1, 2)$. Podaj odległość od osi Ox.

Odpowiedź: 2

Druga współrzędna jest dodatnia i określa wysokość nad Ox.

3. Oblicz pole trójkąta o podstawie 4 i wysokości 3.

Odpowiedź: 6

$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6.$

4. Podaj wysokość wierzchołka $f(x) = -x^2 + 4$.

Odpowiedź: 4

Wierzchołek ma x=0 i wartość f(0)=h².

Grupa B

1. Zera paraboli to -3 i 3. Oblicz odległość między nimi.

Odpowiedź: 6

Od dodatniej współrzędnej odejmujemy ujemną.

2. Wierzchołek to $(2, 3)$. Podaj odległość od osi Ox.

Odpowiedź: 3

Druga współrzędna jest dodatnia i określa wysokość nad Ox.

3. Oblicz pole trójkąta o podstawie 6 i wysokości 3.

Odpowiedź: 9

$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9.$

4. Podaj wysokość wierzchołka $f(x) = -x^2 + 9$.

Odpowiedź: 9

Wierzchołek ma x=0 i wartość f(0)=h².

Grupa C

1. Zera paraboli to -4 i 4. Oblicz odległość między nimi.

Odpowiedź: 8

Od dodatniej współrzędnej odejmujemy ujemną.

2. Wierzchołek to $(3, 4)$. Podaj odległość od osi Ox.

Odpowiedź: 4

Druga współrzędna jest dodatnia i określa wysokość nad Ox.

3. Oblicz pole trójkąta o podstawie 8 i wysokości 3.

Odpowiedź: 12

$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12.$

4. Podaj wysokość wierzchołka $f(x) = -x^2 + 16$.

Odpowiedź: 16

Wierzchołek ma x=0 i wartość f(0)=h².

Grupa D

1. Zera paraboli to -5 i 5. Oblicz odległość między nimi.

Odpowiedź: 10

Od dodatniej współrzędnej odejmujemy ujemną.

2. Wierzchołek to $(4, 5)$. Podaj odległość od osi Ox.

Odpowiedź: 5

Druga współrzędna jest dodatnia i określa wysokość nad Ox.

3. Oblicz pole trójkąta o podstawie 10 i wysokości 3.

Odpowiedź: 15

$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15.$

4. Podaj wysokość wierzchołka $f(x) = -x^2 + 25$.

Odpowiedź: 25

Wierzchołek ma x=0 i wartość f(0)=h².

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Zera paraboli: $-2, 2$. Uczeń podaje długość podstawy.

Odpowiedź: 4

Długość to różnica współrzędnych $2-(-2)=4$.

2. Podstawa trójkąta ma długość 4, a wysokość 1.

Odpowiedź: $P=2$

We wzorze na pole trójkąta występuje czynnik 1/2.

3. Wierzchołek paraboli to $(3, 2)$. Uczeń podaje wysokość nad Ox.

Odpowiedź: 2

Odległość od osi Ox jest wartością bezwzględną drugiej współrzędnej.

Grupa B

1. Zera paraboli: $-3, 3$. Uczeń podaje długość podstawy.

Odpowiedź: 6

Długość to różnica współrzędnych $3-(-3)=6$.

2. Podstawa trójkąta ma długość 6, a wysokość 2.

Odpowiedź: $P=6$

We wzorze na pole trójkąta występuje czynnik 1/2.

3. Wierzchołek paraboli to $(5, 3)$. Uczeń podaje wysokość nad Ox.

Odpowiedź: 3

Odległość od osi Ox jest wartością bezwzględną drugiej współrzędnej.

5 / Matematyka w świecie

1. Ogród ma boki x oraz $6-x$ metrów. Wyznacz x, dla którego pole jest największe.

Odpowiedź: 3

$P=x(6-x)=-(x-3)^2+9$. Maksimum dla x=3.

2. Umowny model zysku to $Z(x)=-(x-3)^2+9$ zł. Podaj największy zysk i wielkość x.

Odpowiedź: $Z_{max}=9,\ x=3$

Odejmowany kwadrat jest najmniejszy i równy 0 w x=3.

3. W doświadczeniu ruch opisuje model $h(t)=t(6-t)$ cm dla $0\le t\le 6$. Oblicz czas i wysokość maksimum.

Odpowiedź: $t=3,\ h=9$

Zera to 0 i 6; ich środek to 3. Po podstawieniu wysokość wynosi 9.

4. Wierzchołek modelu $f(x)=a(x-3)^2$ jest znany, a $f(5)=12$. Odtwórz a i podaj wzór.

Odpowiedź: $a=3,\ f(x)=3(x-3)^2$

Po podstawieniu argumentu odległego o 2 od wierzchołka otrzymujemy $4a=12$.