Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Monotoniczność, wartości i dziedzina

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

W pierwszym przedziale wykres wznosi się, ale w punkcie $x = -2$ wartość spada do 1. Na całym $[-4, -2]$ funkcja nie jest więc rosnąca. W $[1, 3]$ wartości stale maleją, także po przeskoku za x=1. Oceny: FP. Najwyższy punkt ma wartość 4. Poziom $\sqrt{5} + 0$ przecina każdy z trzech odcinków raz, zatem równanie ma trzy rozwiązania. Dziedzina obejmuje wszystkie argumenty od -4 do 3, wraz z końcami. Poniżej poziomu 1 leży tylko końcowa część wykresu: $x \in (2, 3]$.

Odpowiedź: FP; 4; 3; $[-4, 3]$; $(2, 3]$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Dana jest $f(x) = x + 1$ dla $-2 \leq x < 0$ i $f(x) = 1 - x$ dla $0 \leq x \leq 3$. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości.

Odpowiedź: $D = [-2, 3],\ W = [-2, 1]$

Argumenty obejmują od -2 do 3. Pierwsza część daje wartości $[-1, 1)$, druga $[-2, 1]$; ich suma to drugi z tych przedziałów.

2. Dana jest $f(x) = x + 1$ dla $-2 \leq x < 0$ i $f(x) = 1 - x$ dla $0 \leq x \leq 3$. Rozwiąż $f(x) = 0$.

Odpowiedź: $x \in \{-1, 1\}$

Pierwszy wzór daje $x + 1 = 0$, czyli -1. Drugi daje $1 - x = 0$, czyli 1. Oba należą do właściwych części dziedziny.

3. Dana jest $f(x) = x + 1$ dla $-2 \leq x < 0$ i $f(x) = 1 - x$ dla $0 \leq x \leq 3$. Podaj największą wartość i wszystkie argumenty jej osiągania.

Odpowiedź: max $f = 1,\ x = 0$

W pierwszym przedziale wartości są mniejsze od 1, bo 0 jest wyłączone. Drugi wzór przyjmuje wartość 1 tylko w x=0.

4. Dana jest $f(x) = x + 1$ dla $-2 \leq x < 0$ i $f(x) = 1 - x$ dla $0 \leq x \leq 3$. Wyznacz zbiór $\{x : f(x) > -1\}$.

Odpowiedź: $(-2, 2)$

Pierwsza nierówność daje x>-2, zatem (-2,0). Druga daje x<2, czyli [0,2). Suma przedziałów to (-2,2).

5. $g(x) = |x - 1| + |x - (5)|$. Wyznacz minimum g i wszystkie argumenty, dla których jest osiągane.

Odpowiedź: min $g = 4,\ x \in [1, 5]$

Wyrażenie jest sumą odległości od 1 i 5. Między tymi punktami suma wynosi 4, a poza nimi jest większa.

6. Wyznacz, zależnie od m, liczbę rzeczywistych rozwiązań $|x - 1| + |x - (5)| = m$. Uzasadnij wszystkie przypadki.

Odpowiedź: 0 dla m<4; nieskończenie wiele dla m=4; 2 dla m>4.

Dla $x \leq 1$ lewa strona to $6 - 2x$, dla $1 \leq x \leq 5$ wynosi 4, a dla $x \geq 5$ jest równa $2x - 6$. Stąd opis trzech przypadków.

2 / Małe kroki

1. $f(x) = x + 1$ dla $x \in [-2, 2]$. Oblicz f(1).

Odpowiedź: 2

Podstawiamy argument 1 do podanego wzoru.

2. $f(x) = |x - 1|$. Podaj minimum i argument minimum.

Odpowiedź: $0,\ x = 1$

Wartość bezwzględna jest nieujemna, a zeruje się, gdy wyrażenie wewnątrz jest zerem.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $f(x) = |x - 1|$. Oblicz $f(1)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x) = x + 1$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 1

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-1, 3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x - 1| = 1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x = 0$ i $x = 2$.

Grupa B

1. $f(x) = |x - 2|$. Oblicz $f(2)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x) = x + 2$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 2

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-2, 3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x - 2| = 1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x = 1$ i $x = 3$.

Grupa C

1. $f(x) = |x - 3|$. Oblicz $f(3)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x) = x + 3$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 3

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-3, 3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x - 3| = 1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x = 2$ i $x = 4$.

Grupa D

1. $f(x) = |x - 4|$. Oblicz $f(4)$.

Odpowiedź: 0

Wewnątrz wartości bezwzględnej otrzymujemy 0.

2. $f(x) = x + 4$. Oblicz f(0).

Odpowiedź: 4

Podstawiamy x=0.

3. Dziedzina to $[-4, 3]$. Czy 3 należy do dziedziny?

Odpowiedź: Tak.

Nawias kwadratowy oznacza włączenie końca.

4. Ile rozwiązań ma $|x - 4| = 1$?

Odpowiedź: 2

Rozwiązania to $x = 3$ i $x = 5$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $f(x) = |x - 1|$. Uczeń szuka minimum.

Odpowiedź: min $f = 0$

Wartość bezwzględna nie może być ujemna. Minimum to 0.

2. Wykres ma dziedzinę $(-2, 3]$.

Odpowiedź: Nie należy.

Okrągły nawias przy -2 wyłącza ten argument.

3. Rozwiązano $|x - 1| = 2$.

Odpowiedź: $x \in \{-1, 3\}$

Pominięto możliwość, że wyrażenie pod wartością bezwzględną wynosi -2.

Grupa B

1. $f(x) = |x - 2|$. Uczeń szuka minimum.

Odpowiedź: min $f = 0$

Wartość bezwzględna nie może być ujemna. Minimum to 0.

2. Wykres ma dziedzinę $(-2, 3]$.

Odpowiedź: Nie należy.

Okrągły nawias przy -2 wyłącza ten argument.

3. Rozwiązano $|x - 2| = 2$.

Odpowiedź: $x \in \{0, 4\}$

Pominięto możliwość, że wyrażenie pod wartością bezwzględną wynosi -2.

5 / Matematyka w świecie

1. Wędrówka jest opisana odległością od domu: $d(t) = t$ dla $0 \leq t \leq 3$, potem $d(t) = 2(3) - t$ aż do powrotu. Po jakim czasie nastąpi powrót?

Odpowiedź: 6 h

Drugi wzór zeruje się dla $t = 6$.

2. Taryfa wynosi 10 zł do 2 godzin włącznie i po 4 zł za każdą kolejną pełną godzinę. Oblicz koszt 5 godzin.

Odpowiedź: 22 zł

Za pierwsze dwie godziny płacimy 10 zł, a za trzy następne 12 zł; razem 22 zł.

3. W modelu temperatura $T(t) = 1 + |t - 3|$ °C dla $0 \leq t \leq 6$. Kiedy osiąga minimum?

Odpowiedź: $t = 3$

Dodana stała 1 nie zmienia argumentu minimum wartości bezwzględnej.

4. Model $d(x) = |x - p|$ opisuje odległość. Wiadomo, że $d(0) = 4$ i $p > 0$. Odtwórz p i wskaż punkt minimalnej odległości.

Odpowiedź: $p = 4,\ x = 4$

$|p| = 4$ i p>0, więc p=4. Odległość zeruje się w x=p.