Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Nierówność kwadratowa z nawiasami

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Po wymnożeniu i przeniesieniu składników mamy $x^2 + 2x - 24 > 0$. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 2^2 + 4 \cdot 24 = 100$. Miejsca zerowe to $x_1 = \frac{-2-\sqrt{100}}{2} = -6$ oraz $x_2 = \frac{-2+\sqrt{100}}{2} = 4$. Ramiona paraboli są skierowane w górę. Dodatnie wartości występują na zewnątrz miejsc zerowych. Końców nie włączamy, bo nierówność jest ostra.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -6) \cup (4, +\infty)$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Rozwiąż $(x-2)(x+2) \leq 0$.

Odpowiedź: $[-2, 2]$

Iloczyn ma znak niedodatni pomiędzy zerami, wraz z końcami.

2. Rozwiąż $x^2 - 4x + 4 < 1$.

Odpowiedź: $(1, 3)$

Mamy $(x-2)^2 < 1$, czyli $-1 < x - 2 < 1$.

3. Rozwiąż $x^2 - 4 > 0$.

Odpowiedź: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Parabola ma dodatnie wartości na zewnątrz miejsc zerowych. Ostra nierówność wyklucza końce.

4. Wypisz wszystkie całkowite rozwiązania $(x-2)(x-4) \leq 0$.

Odpowiedź: $\{2, 3, 4\}$

Rozwiązania rzeczywiste tworzą przedział $[2, 4]$. Są w nim trzy liczby całkowite.

5. Dla jakich rzeczywistych m nierówność $x^2 - 2mx + m^2 + 2 - m \geq 0$ jest prawdziwa dla każdego rzeczywistego x?

Odpowiedź: $m \leq 2$

Lewą stronę zapisujemy jako $(x-m)^2 + 2 - m$. Najmniejsza wartość wynosi $2 - m$ i jest osiągana przy x=m. Musi być nieujemna, co daje warunek z odpowiedzi.

6. Wyznacz wszystkie rzeczywiste m, dla których nierówność $x^2 - 2mx + m^2 < 4$ ma dokładnie 3 rozwiązań całkowitych.

Odpowiedź: $m \in \mathbb{Z}$

Rozwiązania rzeczywiste tworzą otwarty przedział $(m-2, m+2)$. Gdy m jest całkowite, zawiera on kolejne liczby od $m-1$ do $m+1$, czyli 3 liczb. Gdy $m = k + t$, gdzie k jest całkowite i $0 < t < 1$, są to liczby od $k-1$ do $k+2$, czyli 4. Wymagany przypadek zachodzi wyłącznie dla całkowitych m.

2 / Małe kroki

1. Znajdź miejsca zerowe $x^2 - 4$.

Odpowiedź: $-2, 2$

Z równania $x^2 = 4$ otrzymujemy dwa przeciwne rozwiązania.

2. Jaki znak ma $x^2 + 2$ dla rzeczywistych x?

Odpowiedź: dodatni

Kwadrat jest nieujemny, a dodawana stała jest dodatnia.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Podaj zera $(x-2)(x+1)$.

Odpowiedź: $-1, 2$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

2. Rozwiąż $x^2 \leq 4$.

Odpowiedź: $[-2, 2]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

3. Czy $x = 2$ spełnia $x^2 < 4$?

Odpowiedź: nie

W punkcie granicznym występuje równość.

4. Jaki znak ma $(x-2)^2$?

Odpowiedź: nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Grupa B

1. Podaj zera $(x-3)(x+1)$.

Odpowiedź: $-1, 3$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

2. Rozwiąż $x^2 \leq 9$.

Odpowiedź: $[-3, 3]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

3. Czy $x = 3$ spełnia $x^2 < 9$?

Odpowiedź: nie

W punkcie granicznym występuje równość.

4. Jaki znak ma $(x-3)^2$?

Odpowiedź: nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Grupa C

1. Podaj zera $(x-4)(x+1)$.

Odpowiedź: $-1, 4$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

2. Rozwiąż $x^2 \leq 16$.

Odpowiedź: $[-4, 4]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

3. Czy $x = 4$ spełnia $x^2 < 16$?

Odpowiedź: nie

W punkcie granicznym występuje równość.

4. Jaki znak ma $(x-4)^2$?

Odpowiedź: nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Grupa D

1. Podaj zera $(x-5)(x+1)$.

Odpowiedź: $-1, 5$

Każdy czynnik przyrównujemy do zera.

2. Rozwiąż $x^2 \leq 25$.

Odpowiedź: $[-5, 5]$

Kwadrat nie przekracza danej liczby pomiędzy przeciwnymi pierwiastkami.

3. Czy $x = 5$ spełnia $x^2 < 25$?

Odpowiedź: nie

W punkcie granicznym występuje równość.

4. Jaki znak ma $(x-5)^2$?

Odpowiedź: nieujemny

Każdy kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Rozwiązywano $x^2 < 4$.

Odpowiedź: $-2 < x < 2$

Trzeba uwzględnić także ujemną granicę.

2. Rozwiązywano $(x-2)(x+2) > 0$.

Odpowiedź: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Parabola skierowana w górę jest dodatnia na zewnątrz zer.

3. Rozwiązanie $(x-2)^2 \leq 0$.

Odpowiedź: $x = 2$

Kwadrat może być równy zeru; nierówność nieostra dopuszcza tę wartość.

Grupa B

1. Rozwiązywano $x^2 < 9$.

Odpowiedź: $-3 < x < 3$

Trzeba uwzględnić także ujemną granicę.

2. Rozwiązywano $(x-3)(x+3) > 0$.

Odpowiedź: $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Parabola skierowana w górę jest dodatnia na zewnątrz zer.

3. Rozwiązanie $(x-3)^2 \leq 0$.

Odpowiedź: $x = 3$

Kwadrat może być równy zeru; nierówność nieostra dopuszcza tę wartość.

5 / Matematyka w świecie

1. Prostokąt ma boki x i $x+2$ metrów, x>0. Jego pole nie może przekroczyć 8 m^2. Wyznacz dopuszczalne x.

Odpowiedź: $0 < x \leq 2$

$x(x+2) \leq 8$ daje $(x-2)(x+4) \leq 0$. Przecinamy otrzymany przedział z x>0.

2. Model zysku to $Z(n) = -(n-2)^2 + 4$ dla całkowitego n≥0. Przy jakich n zysk jest nieujemny?

Odpowiedź: $n \in \{0, 1, \ldots, 4\}$

$(n-2)^2 \leq 4$, więc $0 \leq n \leq 4$. Wybieramy liczby całkowite.

3. W ćwiczeniowym modelu wysokość $h(t) = -t^2 + 4t$. Dla jakich nieujemnych chwil h jest dodatnia?

Odpowiedź: $0 < t < 4$

$h(t) = t(4-t)$. Iloczyn jest dodatni pomiędzy zerami 0 i 4.

4. Zadanie odwrócone: rozwiązaniem $x^2 < c$ jest dokładnie przedział $(-2, 2)$. Wyznacz c.

Odpowiedź: 4

Granice są równe $\pm\sqrt{c}$, zatem $\sqrt{c} = 2$ i $c = 4$.