Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Liczba rozwiązań iloczynu

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Pierwszy czynnik daje $x = 0$, a drugi $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$. Dla ostatniego trójmianu wyróżnik, czyli $b^2 - 4ac$, wynosi $4 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$, więc nie daje on rzeczywistych rozwiązań. Są trzy różne rozwiązania.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. Podaj wszystkie różne pierwiastki $x(x-2)(x+2) = 0$ i ich sumę.

Odpowiedź: $-2, 0, 2;\ S = 0$

Zerujemy każdy czynnik. Przeciwne liczby się redukują w sumie.

2. Ile różnych rzeczywistych rozwiązań ma $(x^2-4)(x^2+9) = 0$?

Odpowiedź: 2

Drugi czynnik jest zawsze dodatni. Pierwszy zeruje się dla $x = \pm 2$.

3. Suma wszystkich różnych rozwiązań $(x-2)(x-4)(x-m) = 0$ wynosi 0. Wyznacz m.

Odpowiedź: -6

Gdy m jest różne od 2 i 4, suma to $6 + m$, więc $m = -6$. Gdy m pokrywa się ze znanym dodatnim pierwiastkiem, suma różnych pierwiastków pozostaje 6, a nie 0.

4. Dla jakich m równanie $x(x-2)(x-m) = 0$ ma dokładnie dwa różne pierwiastki?

Odpowiedź: $m \in \{0, 2\}$

Znane pierwiastki 0 i 2 są różne. Trzeci nie może być nową liczbą, więc m musi być jedną z tych dwóch wartości.

5. Czy istnieje m, dla którego $x(x-2)(x-m) = 0$ ma trzy różne pierwiastki o sumie 2? Uzasadnij.

Odpowiedź: nie

Przy trzech różnych pierwiastkach suma wynosi $0 + 2 + m$. Warunek sumy daje m=0, ale wtedy są tylko dwa różne pierwiastki. Zachodzi sprzeczność.

6. Wyznacz wszystkie rzeczywiste k, dla których $(x^2-4)(x^2-kx+4) = 0$ ma dokładnie trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

Odpowiedź: $\varnothing$

Pierwszy czynnik daje zawsze $x = \pm 2$. W drugim wyróżnik wynosi $k^2 - 16$. Gdy jest ujemny, mamy tylko dwa znane pierwiastki. Gdy wynosi zero, k=±4, a jego jedyny pierwiastek jest już równy ±2. Gdy wyróżnik jest dodatni, drugi czynnik ma dwa pierwiastki. Żaden nie pokrywa się z ±2: takie pokrycie wymusiłoby k=±4, czyli wyróżnik zero. Dostajemy wtedy cztery różne pierwiastki. Liczba trzech rozwiązań jest niemożliwa.

2 / Małe kroki

1. Rozwiąż $x(x-2) = 0$.

Odpowiedź: $x = 0$ lub $x = 2$

Iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden czynnik jest zerem.

2. Rozwiąż $x^2 = 4$.

Odpowiedź: $x = \pm 2$

Obie liczby 2 oraz -2 mają kwadrat 4.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Rozwiąż $x(x-2) = 0$.

Odpowiedź: $0, 2$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2 - 4 = 0$.

Odpowiedź: ± 2

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-2)^2=0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+2)=0$.

Odpowiedź: -2

Pierwiastki 0 i -2 sumują się do -2.

Grupa B

1. Rozwiąż $x(x-3)=0$.

Odpowiedź: $0, 3$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2-9=0$.

Odpowiedź: ± 3

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-3)^2=0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+3)=0$.

Odpowiedź: -3

Pierwiastki 0 i -3 sumują się do -3.

Grupa C

1. Rozwiąż $x(x-4)=0$.

Odpowiedź: $0, 4$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2-16=0$.

Odpowiedź: ± 4

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-4)^2=0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+4)=0$.

Odpowiedź: -4

Pierwiastki 0 i -4 sumują się do -4.

Grupa D

1. Rozwiąż $x(x-5)=0$.

Odpowiedź: $0, 5$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2-25=0$.

Odpowiedź: ± 5

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-5)^2=0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+5)=0$.

Odpowiedź: -5

Pierwiastki 0 i -5 sumują się do -5.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Rozwiązywano $x(x-2)=0$.

Odpowiedź: $x=0$ lub $x=2$

Dzielenie przez x zgubiło rozwiązanie x=0.

2. Rozwiązywano $x^2=4$.

Odpowiedź: $x=\pm 2$

Równanie kwadratowe ma także ujemne rozwiązanie.

3. Liczono różne rozwiązania $x(x-2)^2=0$.

Odpowiedź: 2 rozwiązania

Krotność czynnika nie zwiększa liczby różnych liczb będących rozwiązaniami.

Grupa B

1. Rozwiązywano $x(x-3)=0$.

Odpowiedź: $x=0$ lub $x=3$

Dzielenie przez x zgubiło rozwiązanie x=0.

2. Rozwiązywano $x^2=9$.

Odpowiedź: $x=\pm 3$

Równanie kwadratowe ma także ujemne rozwiązanie.

3. Liczono różne rozwiązania $x(x-3)^2=0$.

Odpowiedź: 2 rozwiązania

Krotność czynnika nie zwiększa liczby różnych liczb będących rozwiązaniami.

5 / Matematyka w świecie

1. W modelu zysk $Z(n)=(n-2)(n-4)$. Dla jakich nieujemnych n zysk wynosi zero?

Odpowiedź: $2, 4$

Iloczyn jest zerem, gdy którykolwiek z jego czynników jest zerem.

2. Umowny bilans $B(t)=t(t-2)(t-3)$. Podaj wszystkie nieujemne chwile zerowego bilansu.

Odpowiedź: $0, 2, 3$

Każdy czynnik liniowy daje jedną z wymienionych chwil.

3. Czujnik ma model $S(t)=(t^2-4)(t^2+1)$. Podaj nieujemne chwile t, w których odczyt jest zerowy.

Odpowiedź: 2

Drugi czynnik jest dodatni. Pierwszy daje ±2, a warunek t≥0 pozostawia 2.

4. Zadanie odwrócone: równanie $x(x-m)=0$ ma dwa różne pierwiastki o sumie 2. Wyznacz m.

Odpowiedź: 2

Pierwiastki to 0 i m. Ich suma to m, stąd $m=2$; ponieważ 2>0, są różne.