Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Skracanie wyrażeń wymiernych

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Licznik pierwszego ułamka to $(x+10)^2$. Mnożymy ułamki i skracamy x^2 oraz jeden czynnik $x+10$. Zostaje $\frac{x+10}{x}$. Skracane czynniki są niezerowe dzięki wykluczeniom z treści.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. Uprość $\frac{x^2-4}{x-2}$ i podaj wykluczenie.

Odpowiedź: $x+2,\ x\neq 2$

Licznik rozkładamy na $(x-2)(x+2)$ i skracamy czynnik niezerowy.

2. Oblicz $\frac{x+2}{x-2} : \frac{x+2}{x-2}$ z wykluczeniami.

Odpowiedź: $1,\ x\neq \pm 2$

Dzielimy liczbę przez nią samą. Pierwszy ułamek musi istnieć i nie może być zerem: $x\neq 2$ i $x\neq -2$.

3. Uprość $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$. Podaj dziedzinę.

Odpowiedź: $\frac{4}{x^2-4},\ x\neq \pm 2$

Wspólny mianownik to $(x-2)(x+2)$. Licznik wynosi $x+2-(x-2)=4$.

4. Rozwiąż nierówność $\frac{x-2}{x+2}>0$.

Odpowiedź: $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

Wykluczamy $x=-2$. Iloraz jest dodatni, gdy licznik i mianownik mają te same znaki, co zachodzi w dwóch zewnętrznych przedziałach. $x=2$ daje zero, więc też go nie włączamy.

5. W zależności od rzeczywistego b rozwiąż $\frac{(x-2)(x-b)}{x-2}=0$.

Odpowiedź: $x=b$ dla $b\neq 2$; $\varnothing$ dla $b=2$

Wykluczenie $x\neq 2$ obowiązuje także po skróceniu. Dostajemy $x-b=0$. Gdy $b\neq 2$, jest to dopuszczalny pierwiastek. Gdy $b=2$, jedyna kandydatura jest wykluczona.

6. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y) spełniające $1/x+1/y=1/2$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $\{(3,6),(4,4),(6,3)\}$

Obie liczby muszą przekraczać 2, bo każdy dodatni składnik jest mniejszy od sumy. Po pomnożeniu przez $2xy$ otrzymujemy $xy=2(x+y)$, czyli $(x-2)(y-2)=4$. Każdy dodatni dzielnik d liczby 4 daje dokładnie jedną uporządkowaną parę $x=2+d$, $y=2+4/d$. Przegląd wszystkich dzielników daje odpowiedź.

2 / Małe kroki

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-2)$.

Odpowiedź: $x\neq 2$

Mianownik nie może być zerem.

2. Uprość $2x/2$.

Odpowiedź: x

Skracamy niezerowy czynnik 2.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-2)$.

Odpowiedź: $x\neq 2$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/2+1/2$.

Odpowiedź: 1

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/2$ dla $x = 4$.

Odpowiedź: 2

$4/2 = 2$.

4. Uprość $(x-2)/(x-2)$ dla $x \neq 2$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa B

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-3)$.

Odpowiedź: $x \neq 3$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/3 + 1/3$.

Odpowiedź: $\frac{2}{3}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/3$ dla $x = 6$.

Odpowiedź: 2

$6/3 = 2$.

4. Uprość $(x-3)/(x-3)$ dla $x \neq 3$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa C

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-4)$.

Odpowiedź: $x \neq 4$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/4 + 1/4$.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/4$ dla $x = 8$.

Odpowiedź: 2

$8/4 = 2$.

4. Uprość $(x-4)/(x-4)$ dla $x \neq 4$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa D

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-5)$.

Odpowiedź: $x \neq 5$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/5 + 1/5$.

Odpowiedź: $\frac{2}{5}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/5$ dla $x = 10$.

Odpowiedź: 2

$10/5 = 2$.

4. Uprość $(x-5)/(x-5)$ dla $x \neq 5$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Upraszczano $(x+2)/x$ dla x≠0.

Odpowiedź: $1+2/x$

Nie skracamy składników sumy; dzielimy każdy składnik licznika przez mianownik.

2. Skrócono $(x^2-4)/(x-2)$.

Odpowiedź: $x+2,\ x\neq 2$

Skracanie nie przywraca wartości wykluczonej z pierwotnego mianownika.

3. Rozwiązano $x/(x-2)=0$.

Odpowiedź: 0

Ułamek jest zerem, gdy licznik jest zerem i mianownik niezerowy. Wskazana błędna wartość zeruje mianownik.

Grupa B

1. Upraszczano $(x+3)/x$ dla x≠0.

Odpowiedź: $1+3/x$

Nie skracamy składników sumy; dzielimy każdy składnik licznika przez mianownik.

2. Skrócono $(x^2-9)/(x-3)$.

Odpowiedź: $x+3,\ x\neq 3$

Skracanie nie przywraca wartości wykluczonej z pierwotnego mianownika.

3. Rozwiązano $x/(x-3)=0$.

Odpowiedź: 0

Ułamek jest zerem, gdy licznik jest zerem i mianownik niezerowy. Wskazana błędna wartość zeruje mianownik.

5 / Matematyka w świecie

1. Koszt wykonania n sztuk to $K(n)=2n+100$. Wyraź średni koszt jednej sztuki dla n>0.

Odpowiedź: $2+\frac{100}{n}$

Dzielimy koszt całkowity przez n: $K(n)/n=2+100/n$.

2. Cena hurtowa za n sztuk wynosi $2n+4$ zł. Ile wynosi średnia cena dla $n=2$?

Odpowiedź: 4

Średnia to $2+4/n$, czyli po podstawieniu 4 zł.

3. W roztworze jest 4 g substancji w 2 litrach. Wyraź stężenie $c(V)=4/V$ i oblicz je po dolaniu 2 litrów wody.

Odpowiedź: 1

Nowa objętość wynosi 4 l, a masa substancji się nie zmienia. $c=4/4=1$ g/l.

4. Zadanie odwrócone: średni koszt $2+100/n$ wyniósł 7 zł. Wyznacz dodatnie n.

Odpowiedź: 20

$100/n=5$, zatem $n=20$.