Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Różnica czwartych potęg

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Dwukrotnie stosujemy różnicę kwadratów: $2501^4-2499^4 = (2501^2-2499^2)(2501^2+2499^2) = (2501-2499)(2501+2499)(2501^2+2499^2)$. Pierwsze dwa czynniki dają $2 \cdot 5000 = 10000$. Otrzymaliśmy 10000 pomnożone przez liczbę całkowitą, co dowodzi podzielności.

Odpowiedź: $10000(2501^2+2499^2)$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Wykaż, że $201^4 - 199^4$ jest podzielne przez 800.

Odpowiedź: $800 \mid (201^4 - 199^4)$

Różnica to $(201-199)(201+199)(201^2+199^2)$. Dwa pierwsze czynniki dają $2 \cdot 400 = 800$, a trzeci jest całkowity.

2. Wykaż podzielność $(n+2)^2-(n-2)^2$ przez 8 dla całkowitego n.

Odpowiedź: $8n$

Różnica kwadratów daje $((2)-(-2))(2n) = 8n$.

3. Dla dodatniego całkowitego n wykaż, że $(n+1)^4-(n-1)^4$ jest podzielne przez $8n$.

Odpowiedź: $8n(n^2+1)$

Dwukrotnie rozkładamy różnicę kwadratów. Otrzymujemy $2 \cdot 2n \cdot ((n+1)^2+(n-1)^2) = 4n(2n^2+2) = 8n(n^2+1)$.

4. Znajdź wszystkie dodatnie całkowite n, dla których $n+2$ dzieli n^2+3.

Odpowiedź: $\{5\}$

Zapisujemy $n^2+3 = (n+2)(n-2)+7$. Warunek jest równoważny temu, że dodatni dzielnik $d = n+2 > 2$ dzieli 7. Przegląd takich dzielników daje dokładnie n wskazane w odpowiedzi.

5. Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby całkowitej n liczba n^2-1 jest podzielna przez 8.

Odpowiedź: $8 \mid n^2-1$

$n^2-1 = (n-1)(n+1)$. Oba czynniki są parzyste i różnią się o 2, więc jeden z nich jest podzielny przez 4, a drugi przez 2. Iloczyn jest podzielny przez 8.

6. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ liczba p^2-1 jest podzielna przez 24.

Odpowiedź: $24 \mid p^2-1$

Liczba pierwsza p>3 jest nieparzysta, więc poprzedni argument daje podzielność p^2-1 przez 8. Nie jest też wielokrotnością 3; zatem przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 lub 2, a jej kwadrat resztę 1. Stąd p^2-1 jest podzielne przez 3. Ponieważ 8 i 3 są względnie pierwsze, otrzymujemy podzielność przez 24.

2 / Małe kroki

1. Rozłóż u^2-v^2 na czynniki.

Odpowiedź: $(u-v)(u+v)$

Stosujemy wzór na różnicę kwadratów.

2. Rozłóż u^4-v^4 na iloczyn trzech czynników.

Odpowiedź: $(u-v)(u+v)(u^2+v^2)$

Dwukrotnie stosujemy różnicę kwadratów.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Wyłącz n w n^2+2n.

Odpowiedź: $n(n+2)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $2n$ jest podzielne przez 2 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $2n + 1$ przez 2 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$2n$ jest wielokrotnością 2, a 1 jest mniejsze od 2.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

Grupa B

1. Wyłącz n w $n^2 + 3n$.

Odpowiedź: $n(n + 3)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $3n$ jest podzielne przez 3 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $3n + 1$ przez 3 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$3n$ jest wielokrotnością 3, a 1 jest mniejsze od 3.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

Grupa C

1. Wyłącz n w $n^2 + 4n$.

Odpowiedź: $n(n + 4)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $4n$ jest podzielne przez 4 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $4n + 1$ przez 4 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$4n$ jest wielokrotnością 4, a 1 jest mniejsze od 4.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

Grupa D

1. Wyłącz n w $n^2 + 5n$.

Odpowiedź: $n(n + 5)$

Oba składniki zawierają n.

2. Czy $5n$ jest podzielne przez 5 dla całkowitego n?

Odpowiedź: tak

Jest iloczynem dzielnika i liczby całkowitej.

3. Jaka jest reszta z dzielenia $5n + 1$ przez 5 dla całkowitego n?

Odpowiedź: 1

$5n$ jest wielokrotnością 5, a 1 jest mniejsze od 5.

4. Czy iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty?

Odpowiedź: tak

Jedna z dwóch kolejnych liczb jest parzysta.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Wyłączano czynnik 2 w $2n + 4$.

Odpowiedź: $2(n + 2)$

Po wyłączeniu czynnika dzielimy przez niego każdy składnik.

2. Badano parzystość $n(n + 1)$.

Odpowiedź: Jedna z kolejnych liczb jest parzysta.

Kolejne liczby mają przeciwne parzystości.

3. Z zapisu $N = 2k + 2$ wyciągnięto wniosek o reszcie.

Odpowiedź: $r = 0$

Reszta musi być mniejsza od dzielnika. Mamy $N = 2(k + 1)$.

Grupa B

1. Wyłączano czynnik 3 w $3n + 6$.

Odpowiedź: $3(n + 2)$

Po wyłączeniu czynnika dzielimy przez niego każdy składnik.

2. Badano parzystość $n(n + 1)$.

Odpowiedź: Jedna z kolejnych liczb jest parzysta.

Kolejne liczby mają przeciwne parzystości.

3. Z zapisu $N = 3k + 3$ wyciągnięto wniosek o reszcie.

Odpowiedź: $r = 0$

Reszta musi być mniejsza od dzielnika. Mamy $N = 3(k + 1)$.

5 / Matematyka w świecie

1. W magazynie jest $2n + 6$ sztuk. Wykaż, że można je podzielić na pełne paczki po 2.

Odpowiedź: $n + 3$ paczek

$2n + 6 = 2(n + 3)$, więc liczba pełnych paczek wynosi n+3.

2. Fundusz wynosi $n^2 - 1$ zł, gdzie n jest dodatnie i nieparzyste. Wykaż, że można go rozdzielić równo na 8 całozłotowych części.

Odpowiedź: podział jest możliwy

Z dowodu podzielności $(n - 1)(n + 1)$ przez 8 wynika, że każda część wynosi całkowitą liczbę złotych.

3. Plan pomiarów przewiduje $2^k(1 + 2 + 4)$ odczytów. Ile pełnych serii po 7 odczytów można wykonać?

Odpowiedź: 2^k

Nawias wynosi 7; całkowita liczba pomiarów to $7 \cdot 2^k$.

4. Zadanie odwrócone: liczba $N = 2k + r$ daje przy dzieleniu przez 2 resztę 1. Jeśli $0 \leq r < 2$, wyznacz r.

Odpowiedź: 1

Jednoznaczność reszty z dzielenia wymusza r=1.