Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Potęgi liczb 3, 9 i 27

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Podstawiamy $9 = 3^2$ i $27 = 3^3$. Mamy $\frac{3^{10}\cdot 3^{40}}{3^{45}} = 3^{10+40-45} = 3^5$.

Odpowiedź: B

1 / Od schematu do wyzwania

1. Uprość $\frac{2^2\cdot 4^3}{8^2}$.

Odpowiedź: 4

Wykładnik podstawy 2 wynosi $2 + 2(3) - 3 \cdot 2 = 2$.

2. Oblicz $4^{-1/2} + 2^{-1}$.

Odpowiedź: 1

Oba składniki są równe $1/2$, więc suma to 1.

3. Ile cyfr ma liczba $2^4 5^4$? Uzasadnij.

Odpowiedź: 5

Iloczyn wynosi 10^4: jedynka i 4 zer, czyli 5 cyfr.

4. Znajdź całkowite n spełniające $2^n < 2^4 + 1 < 2^{n+1}$.

Odpowiedź: 4

Liczba leży ściśle między 2^4 i 2^5, ponieważ $1 < 2^4$.

5. Udowodnij podzielność $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ przez 7 dla każdego naturalnego n.

Odpowiedź: $7 \cdot 2^n$

Wyłączamy 2^n: suma wynosi $2^n(1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^n$. Pozostały czynnik jest całkowity.

6. Wyznacz wszystkie nieujemne całkowite x,y spełniające $2^x + 2^y = 2^5$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $x = y = 4$

Bez straty ogólności x≤y. Gdy x<y, po wyłączeniu 2^x otrzymujemy $1 + 2^{y-x} = 2^{5-x}$. Lewa strona jest nieparzysta i większa od 1, więc nie jest potęgą 2. Zatem x=y. Wtedy $2^{x+1} = 2^5$ i $x = y = 4$. Para spełnia równanie.

2 / Małe kroki

1. Oblicz $2^2 \cdot 2^2$.

Odpowiedź: 16

Dodajemy wykładniki: $2^4 = 16$.

2. Zapisz 8^2 jako potęgę 2.

Odpowiedź: 2^6

$8^2 = (2^3)^2 = 2^6$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz $2^2/2^1$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy wykładniki: pozostaje 2^1.

2. Oblicz $3^0 + 2^{-1}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{2}$

To $1 + 1/2 = 3/2$.

3. Zapisz 4^2 jako potęgę 2.

Odpowiedź: 2^4

$(2^2)^2 = 2^4$.

4. Oblicz $10^2 \cdot 10^{-2}$.

Odpowiedź: 1

Wykładniki sumują się do zera.

Grupa B

1. Oblicz $2^3/2^2$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy wykładniki: pozostaje 2^1.

2. Oblicz $3^0 + 2^{-1}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{2}$

To $1 + 1/2 = 3/2$.

3. Zapisz 4^3 jako potęgę 2.

Odpowiedź: 2^6

$(2^2)^3 = 2^6$.

4. Oblicz $10^3 \cdot 10^{-3}$.

Odpowiedź: 1

Wykładniki sumują się do zera.

Grupa C

1. Oblicz $2^4/2^3$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy wykładniki: pozostaje 2^1.

2. Oblicz $3^0 + 2^{-1}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{2}$

To $1 + 1/2 = 3/2$.

3. Zapisz 4^4 jako potęgę 2.

Odpowiedź: 2^8

$(2^2)^4 = 2^8$.

4. Oblicz $10^4 \cdot 10^{-4}$.

Odpowiedź: 1

Wykładniki sumują się do zera.

Grupa D

1. Oblicz $2^5/2^4$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy wykładniki: pozostaje 2^1.

2. Oblicz $3^0 + 2^{-1}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{2}$

To $1 + 1/2 = 3/2$.

3. Zapisz 4^5 jako potęgę 2.

Odpowiedź: 2^{10}

$(2^2)^5 = 2^{10}$.

4. Oblicz $10^5 \cdot 10^{-5}$.

Odpowiedź: 1

Wykładniki sumują się do zera.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Upraszczano $2^2 \cdot 2^3$.

Odpowiedź: 2^5

Przy mnożeniu potęg o tej samej podstawie wykładniki dodajemy.

2. Upraszczano $(3^2)^2$.

Odpowiedź: 3^4

Przy potęgowaniu potęgi wykładniki mnożymy.

3. Obliczano 2^0.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podniesiona do potęgi zerowej daje 1.

Grupa B

1. Upraszczano $2^3 \cdot 2^3$.

Odpowiedź: 2^6

Przy mnożeniu potęg o tej samej podstawie wykładniki dodajemy.

2. Upraszczano $(3^2)^3$.

Odpowiedź: 3^6

Przy potęgowaniu potęgi wykładniki mnożymy.

3. Obliczano 3^0.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podniesiona do potęgi zerowej daje 1.

5 / Matematyka w świecie

1. Serwer przechowuje 2^2 folderów, po 2^3 pliki w każdym. Ile plików przechowuje łącznie?

Odpowiedź: 32

$2^2 \cdot 2^3 = 2^5 = 32$.

2. W modelu podwajamy zasób co rok. Początkowo jest 2 jednostek. Ile będzie po 4 latach?

Odpowiedź: 32

Po czterech podwojeniach otrzymujemy $2 \cdot 2^4 = 32$.

3. W ćwiczeniowej hodowli liczebność $N(t) = 2 \cdot 3^t$. Ile wynosi $N(3)/N(1)$?

Odpowiedź: 9

Skracamy wspólny czynnik: $N(3)/N(1) = 3^{3-1} = 9$.

4. Zadanie odwrócone: zapisano $2^x \cdot 8 = 2^7$. Wyznacz x.

Odpowiedź: 4

$x + 3 = 7$, więc $x = 4$.