Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Iloczyn pierwiastków sześciennych

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Łączymy pierwiastki sześcienne pod jednym znakiem i obliczamy iloraz liczb pod pierwiastkami: $\sqrt[3]{\frac{-750}{6}} = \sqrt[3]{-125} = -5$. Pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby ujemnej jest ujemny.

Odpowiedź: B

1 / Od schematu do wyzwania

1. Oblicz $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[5]{32}$.

Odpowiedź: -1

Otrzymujemy $-(3) + 2 = -1$.

2. Uprość $\frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{8}}$.

Odpowiedź: -2

Łączymy pierwiastki: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

3. Rozwiąż równanie $\sqrt[3]{x+8} = 3$.

Odpowiedź: 19

Potęgujemy obie strony do trzeciej potęgi: $x + 8 = 27$, stąd $x = 19$.

4. Liczby rzeczywiste u, v spełniają $u + v = 4$ i $uv = 1$. Oblicz $u^3 + v^3$.

Odpowiedź: 52

Ze wzoru $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v)$ otrzymujemy $64 - 3(4) = 52$.

5. Wiadomo, że $\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = 4$ i $uv = 8$. Oblicz $u + v$.

Odpowiedź: 40

Oznaczamy pierwiastki przez p i q. Wtedy $pq = 2$. Zatem $u + v = p^3 + q^3 = (4)^3 - 6(4) = 40$.

6. Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n), dla których $\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = 3$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $(1, 8), (8, 1)$

Niech $u = \sqrt[3]{m}$, $v = \sqrt[3]{n}$. Po podniesieniu sumy do sześcianu $27 = m + n + 9uv$, więc $k = uv$ jest wymierny. Ponieważ $k^3 = mn$ jest całkowite, wymierność k wymusza jego całkowitość (skrócony mianownik musiałby dzielić licznik). Mamy $1 \le k \le 9/4$, zatem k=1 lub 2. Z $u^2 - 3u + k = 0$ dostajemy $m = u^3 = (9-k)u - 3k$, więc u jest wymierny, a jako pierwiastek sześcienny z liczby całkowitej jest całkowity. Podobnie v. Dodatnie całkowite u,v o sumie 3 to 1 i 2, stąd m,n to 1 i 8 w obu kolejnościach.

2 / Małe kroki

1. Oblicz $\sqrt[3]{-8}$.

Odpowiedź: -2

Ponieważ $(-2)^3 = -8$, pierwiastek wynosi -2.

2. Oblicz $\sqrt[5]{243} - \sqrt[3]{8}$.

Odpowiedź: 1

Pierwiastki to 3 i 2; ich różnica wynosi 1.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz $\sqrt[3]{8}$.

Odpowiedź: 2

$2^3 = 8$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-8}$.

Odpowiedź: -2

$(-2)^3 = -8$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{243}$.

Odpowiedź: 3

$(3)^5 = 243$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{64}/2$.

Odpowiedź: 2

Pierwiastek to $2 \cdot 2$; dzielimy przez 2.

Grupa B

1. Oblicz $\sqrt[3]{27}$.

Odpowiedź: 3

$3^3 = 27$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-27}$.

Odpowiedź: -3

$(-3)^3 = -27$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{1024}$.

Odpowiedź: 4

$(4)^5 = 1024$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{216}/2$.

Odpowiedź: 3

Pierwiastek to $2 \cdot 3$; dzielimy przez 2.

Grupa C

1. Oblicz $\sqrt[3]{64}$.

Odpowiedź: 4

$4^3 = 64$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-64}$.

Odpowiedź: -4

$(-4)^3 = -64$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{3125}$.

Odpowiedź: 5

$(5)^5 = 3125$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{512}/2$.

Odpowiedź: 4

Pierwiastek to $2 \cdot 4$; dzielimy przez 2.

Grupa D

1. Oblicz $\sqrt[3]{125}$.

Odpowiedź: 5

$5^3 = 125$.

2. Oblicz $\sqrt[3]{-125}$.

Odpowiedź: -5

$(-5)^3 = -125$.

3. Oblicz $\sqrt[5]{7776}$.

Odpowiedź: 6

$(6)^5 = 7776$.

4. Oblicz $\sqrt[3]{1000}/2$.

Odpowiedź: 5

Pierwiastek to $2 \cdot 5$; dzielimy przez 2.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Obliczano $\sqrt[3]{-8}$.

Odpowiedź: -2

Pierwiastek nieparzystego stopnia zachowuje znak liczby pod nim.

2. Obliczano $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}$.

Odpowiedź: 5

Pierwiastek nie rozdziela się przez dodawanie. Najpierw obliczamy każdy pierwiastek.

3. Rozwiązywano $\sqrt[3]{x}=2$.

Odpowiedź: $x=8$

Funkcja sześcienna jest różnowartościowa; nie dopisujemy drugiego znaku.

Grupa B

1. Obliczano $\sqrt[3]{-27}$.

Odpowiedź: -3

Pierwiastek nieparzystego stopnia zachowuje znak liczby pod nim.

2. Obliczano $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}$.

Odpowiedź: 7

Pierwiastek nie rozdziela się przez dodawanie. Najpierw obliczamy każdy pierwiastek.

3. Rozwiązywano $\sqrt[3]{x}=3$.

Odpowiedź: $x=27$

Funkcja sześcienna jest różnowartościowa; nie dopisujemy drugiego znaku.

5 / Matematyka w świecie

1. Pudełko ma kształt sześcianu o objętości 8 dm^3. Oblicz krawędź i łączną długość 12 krawędzi.

Odpowiedź: 2 dm; 24 dm

$s=\sqrt[3]{8}=2$ dm, a $12s=24$ dm.

2. W umownym modelu kosztu $K=x^3$, gdzie x jest liczbą dodatnią, koszt wzrósł z 8 do 64 jednostek. Ile razy wzrosło x?

Odpowiedź: 2

Początkowo $x=2$, potem $x=4$. Iloraz wartości x wynosi 2.

3. Czujnik zapisuje przemieszczenie z jako $z=t^3$. Dla odczytu $z=-8$ wyznacz t i sprawdź znak.

Odpowiedź: -2

$t=\sqrt[3]{-8}=-2$. Ujemne t po potęgowaniu nieparzystym daje ujemny odczyt.

4. Zadanie odwrócone: $\sqrt[3]{N}-2=2$. Odtwórz liczbę N.

Odpowiedź: 64

$\sqrt[3]{N}=4$, więc $N=64$.