Wskazówki dla nauczyciela

Pięć jednostronicowych kart do zadania o dzieleniu z resztą. Karty są propozycją odrębnych zastosowań; nie trzeba realizować całego zestawu podczas jednej lekcji.

1 / Od schematu do wyzwania

Zadania 1–3 utrwalają zależność $a = bq + r$, zadanie 4 wymaga połączenia dwóch warunków, zadanie 5 przygotowuje do myślenia konkursowego, a zadanie 6 wymaga pełnego uzasadnienia. Poziomy 5 i 6 są oceną dydaktyczną autora; nie są cytatami z konkretnego konkursu.

1. $x = 14y+19$, zatem $x/y = 14+19/y$ i $(2x+y)/y = 29+38/y$. Ostatni zapis jest sumą liczby całkowitej i ułamka; nie żądamy ułamka właściwego.

2. $2x = 22y + 16$. Warunek $y > 16$ zapewnia prawidłową resztę 16; iloraz to 22.

3. $17 < d$, więc pasują tylko 18 i 25. Odpowiadają im $N = 179$ i $N = 242$. Sama równość nie wystarcza: reszta musi być mniejsza od dzielnika.

4. $x = 7y + 5$ oraz $x + 8 = 8y + 1$. Po podstawieniu $7y + 13 = 8y + 1$, stąd $y = 12$ i $x = 89$. Reszty 5 i 1 są mniejsze od 12.

5. Najmniejsza nieujemna liczba spełniająca oba warunki to 60: liczby dające resztę 6 przy dzieleniu przez 9 to $6, 15, 24, 33, 42, 51, 60, \ldots$, a pierwszą dającą resztę 4 przy dzieleniu przez 7 jest 60. Jeśli dwie liczby spełniają oba warunki, ich różnica jest podzielna przez 7 i 9, czyli przez 63. Wszystkie rozwiązania mają więc postać $60 + 63k$ dla całkowitych k. Pierwsza liczba trzycyfrowa to **123**.

6. Z warunków wynika, że d i $d+1$ dzielą $2025 - 1 = 2024$. Ponieważ kolejne liczby są względnie pierwsze, ich iloczyn dzieli 2024, więc $d(d+1) \leq 2024$. Stąd $d \leq 44$, a warunek reszty 1 wymusza $d > 1$. Rozkład $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ daje dzielniki w zakresie od 2 do 44: $2, 4, 8, 11, 22, 23, 44$. Tylko dla $d = 22$ następna liczba, 23, także jest dzielnikiem 2024. Sprawdzenie: $2025 = 22 \cdot 92 + 1 = 23 \cdot 88 + 1$. Jedyna odpowiedź: **22**.

2 / Małe kroki

1. $37 = 5 \cdot 7 + 2$; iloraz 7, reszta 2. **2.** $a = 6b + 4$, $a/b = 6 + 4/b$; najmniejszy dzielnik $b = 5$. **3.** $x = 20y + 26$, więc $x/y = 20 + 26/y$; odpowiedź **D**. Na tej karcie dopuszczamy korzystanie z ramki przypominającej zasadę.

Krótki klucz i organizacja pracy

3 / Rozgrzewka: cztery grupy na jednej stronie

Potnij arkusz wzdłuż przerywanych linii. Czas: 5 minut, bez kalkulatora. Każdy numer jest wart 1 punkt; w zadaniu 1 punkt za poprawny iloraz i resztę łącznie, a w zadaniu 3 za wskazanie wszystkich i tylko poprawnych reszt.

Grupa	1: (q, r)	2: N	3: reszty	4: x/y
A	$(4, 5)$	59	0 i 8	$4 + 2/y$
B	$(4, 6)$	67	0 i 9	$5 + 3/y$
C	$(4, 7)$	75	0 i 10	$6 + 4/y$
D	$(4, 8)$	83	0 i 11	$7 + 5/y$

4 / Znajdź błąd: po trzy zadania w dwóch grupach

A1. Iloraz pomnożono przez niewłaściwą wielkość. Poprawnie: $x = 12y + 7$. **A2.** Pominięto dzielenie reszty przez b. Poprawnie: $a/b = 9 + 11/b$. **A3.** Tożsamość liczbowa jest prawdziwa, ale reszta 12 nie jest mniejsza od dzielnika 12. Poprawnie: $84 = 7 \cdot 12 + 0$; iloraz 7, reszta 0.

B1. Poprawnie: $x = 15y + 4$. **B2.** Resztę należy dzielić przez b, a nie przez a: $a/b = 8 + 13/b$. **B3.** Także naruszono warunek reszty. Poprawnie: $96 = 8 \cdot 12 + 0$; iloraz 8, reszta 0.

Propozycja oceniania: po 1 punkcie za rozpoznanie błędu i po 1 punkcie za poprawę z uzasadnieniem, czyli 6 punktów na grupę. Zapis $a = bq + r$ i nierówność $0 \le r < b$ są równie ważne.

5 / Matematyka w świecie: cztery konteksty

1. $347 = 24 \cdot 14 + 11$: 14 pełnych kartonów, 11 książek poza nimi. Do zapakowania wszystkich potrzeba **15 kartonów**.

2. $93 = 8 \cdot 11 + 5$: maksymalnie **11 żetonów**, pozostaje **5 zł**. Ułamek żetonu nie jest zakupem dopuszczonym w treści.

3. $86 \cdot 3 = 258$ dołków; $258 = 96 \cdot 2 + 66$. Potrzeba **3 płytek**, a na ostatniej wolnych będzie $96 - 66 =$ **30 dołków**. Rezerwy laboratoryjne nie wchodzą do modelu z treści.

4. Niech b oznacza liczbę sztuk w opakowaniu. $N = 12b + 7$ dla $b \in \{8, 9, 10, 11\}$, więc możliwe są dokładnie **103, 115, 127 i 139 sztuk**. Warunek $7 < b$ jest spełniony w każdym przypadku.

Wspólny wygląd i proponowany rozkład

A4 pionowo, białe tło, fioletowe nagłówki, jasne linie do zapisu. Karta 1: sześć pasów z rosnącą ilością miejsca na rozumowanie. Karta 2: ramka przypomnienia i trzy duże bloki. Karta 3: cztery ćwiartki. Karta 4: dwie połowy. Karta 5: cztery bloki, a odnośniki bezpośrednio pod treścią każdego zadania, przed miejscem na obliczenia. Wizytówka pozostaje dyskretna, w stopce.