Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Rzut pionowy i parabola

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Równanie $h(t) = 0$ ma postać $t(-4{,}9t + 14{,}7) = 0$. Dodatnie rozwiązanie to $t = 3$ s. Wierzchołek paraboli leży w połowie pomiędzy zerami, więc czas osiągnięcia maksimum wynosi $t = \frac{3}{2}$ s. Odpowiedzi: D; A.

Odpowiedź: D; A

1 / Od schematu do wyzwania

1. $h(t) = -t^2 + 6t$ opisuje lot nad ziemią. Oblicz czas lotu i czas maksimum.

Odpowiedź: $T = 6,\ t_{max} = 3$

$h(t) = t(6 - t)$ ma zera 0 i 6; wierzchołek leży w ich połowie.

2. W modelu $h(t) = t(6 - t)$ oblicz największą wysokość.

Odpowiedź: 9

W maksimum t=3. Podstawiamy: $h(3) = 3(6 - 3) = 9$.

3. Dla $h(t) = t(6 - t)$ znajdź chwile osiągnięcia wysokości 8.

Odpowiedź: $t = 2, 4$

Postać kanoniczna to $h(t) = -(t - 3)^2 + 9$. Warunek daje $(t - 3)^2 = 1$.

4. Model $h(t) = at(6 - t)$ ma maksimum 27. Wyznacz dodatnie a.

Odpowiedź: 3

Maksimum w t=3 wynosi $a9$. Porównanie z 27 daje a=3.

5. Wykaż, że w modelu $h(t) = t(6 - t)$ dla $0 \leq t \leq 6$ chwile tej samej wysokości, jeśli są różne, sumują się do 6.

Odpowiedź: $t_1 + t_2 = 6$

Z równości wysokości po wyłączeniu $t_1 - t_2$ otrzymujemy $(t_1 - t_2)(6 - t_1 - t_2) = 0$. Dla różnych chwil zeruje się drugi czynnik.

6. Dla jakich dodatnich całkowitych v model $h(t) = t(v - t)$ osiąga wysokość 6 w dwóch różnych całkowitych chwilach? Podaj wszystkie v.

Odpowiedź: $v \in \{5, 7\}$

Równanie t(v-t)=6 oznacza rozkład tej liczby na dwa różne dodatnie czynniki u,w; wtedy t=u lubw, a v=u+w. Pary to (1, 6), (2, 3). Ich sumy dają wszystkie wypisane wartości.

2 / Małe kroki

1. Rozwiąż $t(6 - t) = 0$.

Odpowiedź: $t = 0$ lub $t = 6$

Każdy z dwóch czynników może się zerować.

2. Lot zaczyna się w t=0, kończy w t=6. Kiedy jest maksimum symetrycznej paraboli?

Odpowiedź: 3

W połowie między zerami.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. $h(t) = t(4 - t)$. Oblicz h(0).

Odpowiedź: 0

Czynnik t jest zerowy.

2. $h(t) = t(4 - t)$. Kiedy h ponownie wynosi 0?

Odpowiedź: 4

Oprócz t=0 otrzymujemy t=h+2.

3. Lot trwa 4 sekund. Parabola jest symetryczna między zerami. Podaj czas maksimum.

Odpowiedź: 2

Wierzchołek leży w połowie między zerami 0 i 2 h.

4. Oblicz $h(2)$ dla $h(t) = t(4 - t)$.

Odpowiedź: 4

$h(2) = 2(4 - 2) = 4$.

Grupa B

1. $h(t) = t(5 - t)$. Oblicz h(0).

Odpowiedź: 0

Czynnik t jest zerowy.

2. $h(t) = t(5 - t)$. Kiedy h ponownie wynosi 0?

Odpowiedź: 5

Oprócz t=0 otrzymujemy t=h+2.

3. Lot trwa 6 sekund. Parabola jest symetryczna między zerami. Podaj czas maksimum.

Odpowiedź: 3

Wierzchołek leży w połowie między zerami 0 i 2 h.

4. Oblicz $h(3)$ dla $h(t) = t(6 - t)$.

Odpowiedź: 9

$h(3) = 3(6 - 3) = 9$.

Grupa C

1. $h(t) = t(6 - t)$. Oblicz h(0).

Odpowiedź: 0

Czynnik t jest zerowy.

2. $h(t) = t(6 - t)$. Kiedy h ponownie wynosi 0?

Odpowiedź: 6

Oprócz t=0 otrzymujemy t=h+2.

3. Lot trwa 8 sekund. Parabola jest symetryczna między zerami. Podaj czas maksimum.

Odpowiedź: 4

Wierzchołek leży w połowie między zerami 0 i 2 h.

4. Oblicz $h(4)$ dla $h(t) = t(8 - t)$.

Odpowiedź: 16

$h(4) = 4(8 - 4) = 16$.

Grupa D

1. $h(t) = t(7 - t)$. Oblicz h(0).

Odpowiedź: 0

Czynnik t jest zerowy.

2. $h(t) = t(7 - t)$. Kiedy h ponownie wynosi 0?

Odpowiedź: 7

Oprócz t=0 otrzymujemy t=h+2.

3. Lot trwa 10 sekund. Parabola jest symetryczna między zerami. Podaj czas maksimum.

Odpowiedź: 5

Wierzchołek leży w połowie między zerami 0 i 2 h.

4. Oblicz $h(5)$ dla $h(t) = t(10 - t)$.

Odpowiedź: 25

$h(5) = 5(10 - 5) = 25$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $h(t) = t(4-t)$. Uczeń podaje czas powrotu na ziemię.

Odpowiedź: $t = 4$

Zero w chwili startu nie jest chwilą ponownego upadku.

2. $h(t) = t(4-t)$. Uczeń podaje czas największej wysokości.

Odpowiedź: $t = 2$

Największa wysokość występuje w połowie czasu między zerami.

3. $h(t) = -t^2 + 4t$. Uczeń oblicza współrzędną wierzchołka.

Odpowiedź: $p = 2$

$p = -b/(2a) = -4/(-2) = 2.$

Grupa B

1. $h(t) = t(6-t)$. Uczeń podaje czas powrotu na ziemię.

Odpowiedź: $t = 6$

Zero w chwili startu nie jest chwilą ponownego upadku.

2. $h(t) = t(6-t)$. Uczeń podaje czas największej wysokości.

Odpowiedź: $t = 3$

Największa wysokość występuje w połowie czasu między zerami.

3. $h(t) = -t^2 + 6t$. Uczeń oblicza współrzędną wierzchołka.

Odpowiedź: $p = 3$

$p = -b/(2a) = -6/(-2) = 3.$

5 / Matematyka w świecie

1. Ogród ma boki x oraz $10 - x$ metrów. Wyznacz x, dla którego pole jest największe.

Odpowiedź: 5

$P = x(10-x) = -(x-5)^2 + 25$. Maksimum dla x=5.

2. Umowny model zysku to $Z(x) = -(x-5)^2 + 25$ zł. Podaj największy zysk i wielkość x.

Odpowiedź: $Z_{max} = 25,\ x = 5$

Odejmowany kwadrat jest najmniejszy i równy 0 w x=5.

3. W doświadczeniu ruch opisuje model $h(t) = t(10-t)$ cm dla $0 \le t \le 10$. Oblicz czas i wysokość maksimum.

Odpowiedź: $t = 5,\ h = 25$

Zera to 0 i 10; ich środek to 5. Po podstawieniu wysokość wynosi 25.

4. Wierzchołek modelu $f(x) = a(x-5)^2$ jest znany, a $f(7) = 12$. Odtwórz a i podaj wzór.

Odpowiedź: $a = 3,\ f(x) = 3(x-5)^2$

Po podstawieniu argumentu odległego o 2 od wierzchołka otrzymujemy $4a = 12$.