Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Losowanie cyfr

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 25. Liczby są parzyste, więc pozostaje sprawdzić podzielność sumy cyfr przez 3. Sprzyjające liczby to 12, 18, 30, 36, 54, 72, 78, 90, 96. Prawdopodobieństwo wynosi $\frac{9}{25} = \frac{9}{25}$.

Odpowiedź: $\frac{9}{25}$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Losujemy niezależnie cyfrę dziesiątek z $1, 3, 5, 7, 9$ i jedności z $0, 2, 4, 6, 8$. Oblicz P podzielności liczby przez 3.

Odpowiedź: $\frac{9}{25}$

Sprawdzamy pary cyfr. Sprzyjające liczby: 12,18,30,36,54,72,78,90,96. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 25, sprzyjających 9. Stąd $P = \frac{9}{25} = \frac{9}{25}$.

2. Losujemy niezależnie cyfrę dziesiątek z $1, 3, 5, 7, 9$ i jedności z $0, 2, 4, 6, 8$. Oblicz P podzielności liczby przez 6.

Odpowiedź: $\frac{9}{25}$

Sprawdzamy pary cyfr. Sprzyjające liczby: 12,18,30,36,54,72,78,90,96. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 25, sprzyjających 9. Stąd $P = \frac{9}{25} = \frac{9}{25}$.

3. Losujemy niezależnie cyfrę dziesiątek z $1, 3, 5, 7, 9$ i jedności z $0, 2, 4, 6, 8$. Oblicz P podzielności liczby przez 4.

Odpowiedź: $\frac{2}{5}$

Sprawdzamy pary cyfr. Sprzyjające liczby: 12,16,32,36,52,56,72,76,92,96. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 25, sprzyjających 10. Stąd $P = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.

4. Z pary zbiorów $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ losujemy cyfry dziesiątek i jedności. Oblicz P, że liczba jest większa od 50 i podzielna przez 6.

Odpowiedź: $\frac{1}{5}$

Warunki muszą być spełnione jednocześnie. Liczby: 54,72,78,90,96. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 25, sprzyjających 5. Stąd $P = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

5. Spośród wszystkich liczb dwucyfrowych losujemy jedną. Znajdź wszystkie dzielniki d od 30 do 40, dla których P podzielności przez d wynosi $1/45$.

Odpowiedź: $d \in \{34, 35, 36, 37, 38, 39, 40\}$

Prawdopodobieństwo $1/45 = 2/90$ oznacza 2 wielokrotności. Dla d od 30 do 33 są 3: d,2 d,3 d. Dla d od 34 do 40 są 2: d,2 d. To wszystkie liczby z podanego zakresu.

6. Losujemy jednakowo prawdopodobnie liczbę trzycyfrową o różnych cyfrach. Oblicz P podzielności przez 6. Uzasadnij zliczenie, rozpatrując cyfrę jedności.

Odpowiedź: $\frac{115}{648}$

Wszystkich liczb jest $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. Cyfra jedności c jest parzysta, a suma cyfr jest podzielna przez 3. Dla ustalonego c zliczamy pary setek $a \neq 0$ i dziesiątek b, wykluczając powtórzenia. Grupujemy je według reszty a modulo 3. Dla $c = 0$: $6 + 9 + 9 = 24$; dla $c = 2$: $9 + 12 + 2 = 23$; dla $c = 4$: $9 + 2 + 12 = 23$; dla $c = 6$: $4 + 9 + 9 = 22$; dla $c = 8$: $9 + 12 + 2 = 23$. Na przykład przy $c = 2$ potrzeba $a + b \equiv 1 \pmod 3$: klasy reszt $(0, 1), (1, 0), (2, 2)$ dają odpowiednio $3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 2 \cdot 1$ par. Łącznie jest 115 liczb sprzyjających. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 648, sprzyjających 115. Stąd $P = \frac{115}{648} = \frac{115}{648}$.

2 / Małe kroki

1. Ile liczb naturalnych jest od 10 do 99 włącznie?

Odpowiedź: 90

$99 - 10 + 1 = 90$. Wynik: 90.

2. Losujemy liczbę od 10 do 99. Oblicz P wylosowania 20 lub 40.

Odpowiedź: $\frac{1}{45}$

Są 2 sprzyjające liczby. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 90, sprzyjających 2. Stąd $P = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Ile elementów ma zbiór $\{10, 11, \ldots, 19\}$?

Odpowiedź: 10

Liczby od 10 do 19 włącznie. Wynik: 10.

2. Losujemy cyfrę od 0 do 9. Oblicz P wylosowania 0.

Odpowiedź: $\frac{1}{10}$

Jedna z 10 cyfr. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 10, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$.

3. Losujemy liczbę od 10 do 29. Oblicz P podzielności przez 3.

Odpowiedź: $\frac{3}{10}$

Sprzyjające liczby: 12,15,18,21,24,27. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 20, sprzyjających 6. Stąd $P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

4. Losujemy dwie cyfry niezależnie, każdą z $\{1, 2\}$. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Wyniki:(1,1),(1,2),(2,1),(2,2). Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 4, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Grupa B

1. Ile elementów ma zbiór $\{10, 11, \ldots, 19\}$?

Odpowiedź: 10

Liczby od 10 do 19 włącznie. Wynik: 10.

2. Losujemy cyfrę od 0 do 9. Oblicz P wylosowania 0.

Odpowiedź: $\frac{1}{10}$

Jedna z 10 cyfr. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 10, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$.

3. Losujemy liczbę od 10 do 29. Oblicz P podzielności przez 4.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Sprzyjające liczby: 12,16,20,24,28. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 20, sprzyjających 5. Stąd $P = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

4. Losujemy dwie cyfry niezależnie, każdą z $\{1, 2\}$. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Wyniki:(1,1),(1,2),(2,1),(2,2). Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 4, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Grupa C

1. Ile elementów ma zbiór $\{10, 11, \ldots, 19\}$?

Odpowiedź: 10

Liczby od 10 do 19 włącznie. Wynik: 10.

2. Losujemy cyfrę od 0 do 9. Oblicz P wylosowania 0.

Odpowiedź: $\frac{1}{10}$

Jedna z 10 cyfr. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 10, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$.

3. Losujemy liczbę od 10 do 29. Oblicz P podzielności przez 5.

Odpowiedź: $\frac{1}{5}$

Sprzyjające liczby: 10,15,20,25. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 20, sprzyjających 4. Stąd $P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

4. Losujemy dwie cyfry niezależnie, każdą z $\{1, 2\}$. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Wyniki:(1,1),(1,2),(2,1),(2,2). Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 4, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Grupa D

1. Ile elementów ma zbiór $\{10, 11, \ldots, 19\}$?

Odpowiedź: 10

Liczby od 10 do 19 włącznie. Wynik: 10.

2. Losujemy cyfrę od 0 do 9. Oblicz P wylosowania 0.

Odpowiedź: $\frac{1}{10}$

Jedna z 10 cyfr. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 10, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$.

3. Losujemy liczbę od 10 do 29. Oblicz P podzielności przez 6.

Odpowiedź: $\frac{3}{20}$

Sprzyjające liczby: 12,18,24. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 20, sprzyjających 3. Stąd $P = \frac{3}{20} = \frac{3}{20}$.

4. Losujemy dwie cyfry niezależnie, każdą z $\{1, 2\}$. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Wyniki:(1,1),(1,2),(2,1),(2,2). Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 4, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Losujemy jedną liczbę dwucyfrową. Są 2 sprzyjające liczby.

Odpowiedź: $P = 2/90$

Liczb dwucyfrowych jest 90, a nie 89.

2. Losujemy niezależnie cyfrę z 3-elementowego i 2-elementowego zbioru. Jest 1 sprzyjająca para.

Odpowiedź: $P = 1/6$

Liczbę par otrzymujemy przez mnożenie 3 razy 2.

3. Wśród 10 równych szansą wyników są 2 sprzyjające.

Odpowiedź: $\frac{1}{5}$

W liczniku jest liczba wyników sprzyjających, a w mianowniku wszystkich.

Grupa B

1. Losujemy jedną liczbę dwucyfrową. Są 2 sprzyjające liczby.

Odpowiedź: $P = 2/90$

Liczb dwucyfrowych jest 90, a nie 89.

2. Losujemy niezależnie cyfrę z 3-elementowego i 2-elementowego zbioru. Jest 1 sprzyjająca para.

Odpowiedź: $P = 1/6$

Liczbę par otrzymujemy przez mnożenie 3 razy 2.

3. Wśród 10 równych szansą wyników są 3 sprzyjające.

Odpowiedź: $\frac{3}{10}$

W liczniku jest liczba wyników sprzyjających, a w mianowniku wszystkich.

5 / Matematyka w świecie

1. Na 21 biletach tylko 3 mają symbol nagrody. Losujemy jeden bilet. Oblicz P nagrody.

Odpowiedź: $\frac{1}{7}$

Trzy bilety sprzyjające spośród 21.

2. Z 90 dwucyfrowych kodów rabatu nagrodę dają kody 34 i 68. Losujemy jeden kod. Oblicz P nagrody.

Odpowiedź: $\frac{1}{45}$

Dwa sprzyjające kody spośród 90.

3. Próbki ponumerowano od 1 do 30. Do kontroli wybiera się jednakowo prawdopodobnie jedną. Oblicz P numeru podzielnego przez 6.

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$

Numery 6,12,18,24,30 dają 5 możliwości z 30.

4. W losowaniu spośród 90 liczb dwucyfrowych zdarzenie ma P=1/30. Ile jest liczb sprzyjających?

Odpowiedź: 3

Jeśli ich liczba to s, to $s/90 = 1/30$, więc s=3.