Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Porównywanie objętości

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Promień walca oznaczamy r, a wysokość obu brył h. Objętości to $\frac{1}{3}\pi(2r)^2h$ i πr^2h. Dzielimy i skracamy wspólne czynniki, uzyskując $\frac{4}{3}$. Odpowiedź: D.

Odpowiedź: D

1 / Od schematu do wyzwania

1. Stożek i walec mają równe wysokości. Promień stożka jest 4 razy większy. Podaj stosunek objętości stożka do walca.

Odpowiedź: $\frac{16}{3}$

$V_s/V_w = \frac{\pi(4r)^2h}{3\pi r^2h} = \frac{16}{3}$.

2. Promienie stożka i walca są równe. Wysokość stożka jest 4 razy większa. Oblicz iloraz objętości stożka i walca.

Odpowiedź: $\frac{4}{3}$

$V_s/V_w = \frac{\pi r^2(4h)}{3\pi r^2h} = \frac{4}{3}$.

3. Promień stożka jest 3 razy większy od promienia walca, ale jego wysokość jest 3 razy mniejsza. Oblicz iloraz objętości stożka i walca.

Odpowiedź: 1

$V_s/V_w = \frac{\pi(3r)^2(h/3)}{3\pi r^2h} = \frac{3}{3}$.

4. Stożek ma promień $3r$ i wysokość $4r$, a walec promień r. Ich objętości są równe. Wyznacz stosunek pól powierzchni bocznych stożka i walca.

Odpowiedź: $5:8$

Objętość stożka to $12\pi r^3$, więc wysokość walca wynosi $12r$. Tworząca stożka ma długość $\sqrt{(3r)^2+(4r)^2} = 5r$. Pola boczne to $15\pi r^2$ i $24\pi r^2$, a ich stosunek wynosi $5:8$.

5. Dwa walce mają jednakowe objętości. Promień drugiego jest $q > 0$ razy większy. Udowodnij zależność między ich wysokościami.

Odpowiedź: $h_2 = h_1/q^2$

Z $\pi r^2h_1 = \pi(qr)^2h_2$ po skróceniu przez dodatnie πr^2 mamy $h_1 = q^2h_2$. Dzielimy przez $q^2 > 0$.

6. Objętość stożka jest 36 razy większa od objętości walca. Ilorazy promieni R/r i wysokości H/h są dodatnimi liczbami całkowitymi. Wyznacz wszystkie takie pary i uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $(1,108), (2,27), (3,12), (6,3)$

Oznaczmy ilorazy przez q, t. Mamy $q^2t/3 = 36$, czyli $q^2t = 108 = 2^2 \cdot 3^3$. Zatem kwadrat q^2 dzieli 108. Możliwe q to 1,2,3,6, ponieważ każdy wykładnik czynnika pierwszego w q^2 jest parzysty. Odpowiednie $t = 108/q^2$ wynoszą 108,27,12,3. Każda z czterech par spełnia równanie.

2 / Małe kroki

1. Walec ma promień 3 i wysokość 3. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 27π

$V = \pi r^2h = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 27\pi$.

2. Stożek i walec mają te same promienie podstaw i równe wysokości. Podaj stosunek objętości stożka do objętości walca.

Odpowiedź: $1:3$

Stożek ma objętość $\pi r^2h/3$, a walec πr^2h. Iloraz wynosi $1/3$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Walec ma promień 1 i wysokość 3. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 3π

$V = \pi r^2 h$.

2. Stożek ma promień 1 i wysokość 9. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 3π

$V = \pi r^2 h/3$.

3. Promień walca podwojono, a wysokość zachowano. Ile razy wzrosła objętość?

Odpowiedź: 4

Wzór zawiera kwadrat promienia.

4. Objętość walca to 3π. Stożek ma tę samą podstawę i wysokość. Podaj jego objętość.

Odpowiedź: 1π

Objętość stożka stanowi jedną trzecią objętości takiego walca.

Grupa B

1. Walec ma promień 1 i wysokość 4. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 4π

$V = \pi r^2 h$.

2. Stożek ma promień 1 i wysokość 12. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 4π

$V = \pi r^2 h/3$.

3. Promień walca podwojono, a wysokość zachowano. Ile razy wzrosła objętość?

Odpowiedź: 4

Wzór zawiera kwadrat promienia.

4. Objętość walca to 4π. Stożek ma tę samą podstawę i wysokość. Podaj jego objętość.

Odpowiedź: $\frac{4}{3}\pi$

Objętość stożka stanowi jedną trzecią objętości takiego walca.

Grupa C

1. Walec ma promień 1 i wysokość 5. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 5π

$V = \pi r^2 h$.

2. Stożek ma promień 1 i wysokość 15. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 5π

$V = \pi r^2 h/3$.

3. Promień walca podwojono, a wysokość zachowano. Ile razy wzrosła objętość?

Odpowiedź: 4

Wzór zawiera kwadrat promienia.

4. Objętość walca to 5π. Stożek ma tę samą podstawę i wysokość. Podaj jego objętość.

Odpowiedź: $\frac{5}{3}\pi$

Objętość stożka stanowi jedną trzecią objętości takiego walca.

Grupa D

1. Walec ma promień 1 i wysokość 6. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 6π

$V = \pi r^2 h$.

2. Stożek ma promień 1 i wysokość 18. Oblicz objętość.

Odpowiedź: 6π

$V = \pi r^2 h/3$.

3. Promień walca podwojono, a wysokość zachowano. Ile razy wzrosła objętość?

Odpowiedź: 4

Wzór zawiera kwadrat promienia.

4. Objętość walca to 6π. Stożek ma tę samą podstawę i wysokość. Podaj jego objętość.

Odpowiedź: 2π

Objętość stożka stanowi jedną trzecią objętości takiego walca.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Stożek ma promień 1 i wysokość 9.

Odpowiedź: 3π

Pominięto czynnik $1/3$ we wzorze na objętość stożka.

2. Promień walca zwiększono 3 razy bez zmiany wysokości.

Odpowiedź: 9

Objętość zależy od kwadratu promienia, więc mnożnik wynosi kwadrat podanej liczby.

3. Stożek i walec mają jednakowe promienie i wysokości.

Odpowiedź: $1/3$

Odwrócono iloraz: objętość stożka dzielimy przez objętość walca.

Grupa B

1. Stożek ma promień 1 i wysokość 12.

Odpowiedź: 4π

Pominięto czynnik $1/3$ we wzorze na objętość stożka.

2. Promień walca zwiększono 4 razy bez zmiany wysokości.

Odpowiedź: 16

Objętość zależy od kwadratu promienia, więc mnożnik wynosi kwadrat podanej liczby.

3. Stożek i walec mają jednakowe promienie i wysokości.

Odpowiedź: $1/3$

Odwrócono iloraz: objętość stożka dzielimy przez objętość walca.

5 / Matematyka w świecie

1. Zbiornik walcowy ma promień 3 dm i wysokość 3 dm. Oblicz pojemność w litrach.

Odpowiedź: 27π l

Liczymy $\pi r^2 h$ w dm sześciennych; $1\ \text{dm}^3 = 1$ litr.

2. Stożkowe opakowanie ma taką samą podstawę i wysokość jak walcowe. Cena wypełnienia walca wynosi 90 zł. Koszt jest proporcjonalny do objętości. Ile kosztuje wypełnienie stożka?

Odpowiedź: 30 zł

Wypełniamy trzy razy mniejszą objętość, więc cena to $90/3 = 30$ zł.

3. W modelu próbka walcowa ma dwukrotnie większy promień i dwukrotnie mniejszą wysokość od drugiej próbki. Ile razy większa jest jej objętość?

Odpowiedź: 2

Iloraz objętości wynosi $2^2 \cdot (1/2) = 2$.

4. Stożek i walec mają równe wysokości. Objętość stożka jest trzykrotnie większa od objętości walca. Odtwórz iloraz promieni stożka i walca.

Odpowiedź: 3

$R^2/(3r^2) = 3$ daje $(R/r)^2 = 9$. Promienie są dodatnie, więc $R/r = 3$.