Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Dwusieczna i stosunek pól

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Trójkąty mają wspólną wysokość opuszczoną z M na KL. Stosunek ich pól wynosi więc $KN : NL$. Twierdzenie o dwusiecznej daje $\frac{KN}{NL} = \frac{KM}{LM} = \frac{a}{b}$. To dowodzi tezy.

Odpowiedź: $\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{a}{b}$

1 / Od schematu do wyzwania

1. W trójkącie ABC $AB = 8, AC = 12, BC = 10$. Dwusieczna z A przecina BC w D. Oblicz BD i DC.

Odpowiedź: $4,\ 6$

$BD : DC = 2 : 3$, a ich suma to 10. Jedna część ma długość 2.

2. W trójkącie $AB = 6, AC = 8$. Dwusieczna AD dzieli pole na dwie części. Pole ABD wynosi 36. Oblicz pole ABC.

Odpowiedź: 84

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Pola ABD i ACD są w stosunku 3:4. Druga część ma pole 12 k², a całość 21 k² po podstawieniu k.

3. Dwusieczna AD dzieli BC na odcinki 6 i 10. Obwód ABC wynosi 48. Oblicz AB i AC.

Odpowiedź: $12,\ 20$

$AB : AC = 3 : 5$. Ich suma to $48 - 16 = 32$, więc boki mają długości 12 i 20.

4. W trójkącie ABC dwusieczna AD jest również środkową. Wykaż $AB = AC$.

Odpowiedź: $AB = AC$

Ze środkowej mamy BD=DC. Twierdzenie o dwusiecznej daje AB/AC=BD/DC=1, więc boki są równe.

5. W trójkącie ABC punkt D leży na BC. Pola ABD i ACD są w stosunku AB: AC. Wykaż, że AD jest dwusieczną kąta A.

Odpowiedź: AD jest dwusieczną.

Wspólna wysokość daje $P_{ABD}/P_{ACD} = BD/DC$. Z założenia jest to AB/AC. Odwrotne twierdzenie o dwusiecznej daje tezę.

6. Boki trójkąta mają długości AB=c, AC=b, BC=a, a AD jest dwusieczną. Wykaż $AD^2 = bc(1 - a^2/(b + c)^2)$.

Odpowiedź: $AD^2 = bc(1 - a^2/(b + c)^2)$

Oznaczmy BD=m, DC=n. Z dwusiecznej $m = ac/(b + c), n = ab/(b + c)$. Twierdzenie Stewarta dla AD daje $b^2m + c^2n = a(AD^2 + mn)$. Po podstawieniu lewa strona wynosi abc. Dzieląc przez a otrzymujemy $bc = AD^2 + a^2bc/(b+c)^2$ i przekształcamy do tezy.

2 / Małe kroki

1. Dwusieczna dzieli bok BC w D, a $AB : AC = 2 : 3$. Podaj BD: DC.

Odpowiedź: $2 : 3$

Z twierdzenia o dwusiecznej $BD/DC = AB/AC$.

2. Podstawy trójkątów ABD i ACD leżą na BC i mają długości 4 i 6. Oblicz stosunek ich pól.

Odpowiedź: $2 : 3$

Mają wspólną wysokość z A, więc stosunek pól jest stosunkiem podstaw.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Dwusieczna z A: AB: AC=3:4. Podaj BD: DC.

Odpowiedź: $3 : 4$

Jest to bezpośrednie twierdzenie o dwusiecznej.

2. BD=2, DC=4. Podaj stosunek pól ABD: ACD.

Odpowiedź: $1 : 2$

Trójkąty mają wspólną wysokość.

3. Dwusieczna AD jest środkową. Jaki jest stosunek AB: AC?

Odpowiedź: $1 : 1$

BD=DC, więc z twierdzenia AB/AC=1.

4. $BC = 10$ i $BD : DC = 2 : 3$. Oblicz BD.

Odpowiedź: 4

Dzielimy BC na 5 części po 2; BD obejmuje dwie.

Grupa B

1. Dwusieczna z A: AB: AC=3:4. Podaj BD: DC.

Odpowiedź: $3 : 4$

Jest to bezpośrednie twierdzenie o dwusiecznej.

2. BD=3, DC=6. Podaj stosunek pól ABD: ACD.

Odpowiedź: $1 : 2$

Trójkąty mają wspólną wysokość.

3. Dwusieczna AD jest środkową. Jaki jest stosunek AB: AC?

Odpowiedź: $1 : 1$

BD=DC, więc z twierdzenia AB/AC=1.

4. $BC = 15$ i $BD : DC = 2 : 3$. Oblicz BD.

Odpowiedź: 6

Dzielimy BC na 5 części po 3; BD obejmuje dwie.

Grupa C

1. Dwusieczna z A: AB: AC=3:4. Podaj BD: DC.

Odpowiedź: $3 : 4$

Jest to bezpośrednie twierdzenie o dwusiecznej.

2. BD=4, DC=8. Podaj stosunek pól ABD: ACD.

Odpowiedź: $1 : 2$

Trójkąty mają wspólną wysokość.

3. Dwusieczna AD jest środkową. Jaki jest stosunek AB: AC?

Odpowiedź: $1 : 1$

BD=DC, więc z twierdzenia AB/AC=1.

4. $BC = 20$ i $BD : DC = 2 : 3$. Oblicz BD.

Odpowiedź: 8

Dzielimy BC na 5 części po 4; BD obejmuje dwie.

Grupa D

1. Dwusieczna z A: AB: AC=3:4. Podaj BD: DC.

Odpowiedź: $3 : 4$

Jest to bezpośrednie twierdzenie o dwusiecznej.

2. BD=5, DC=10. Podaj stosunek pól ABD: ACD.

Odpowiedź: $1 : 2$

Trójkąty mają wspólną wysokość.

3. Dwusieczna AD jest środkową. Jaki jest stosunek AB: AC?

Odpowiedź: $1 : 1$

BD=DC, więc z twierdzenia AB/AC=1.

4. $BC = 25$ i $BD : DC = 2 : 3$. Oblicz BD.

Odpowiedź: 10

Dzielimy BC na 5 części po 5; BD obejmuje dwie.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Dwusieczna AD: AB: AC=2:3.

Odpowiedź: $2 : 3$

Odcinki przy B i C odpowiadają odpowiednio bokom AB i AC.

2. AB: AC=2:3, a AD jest dwusieczną.

Odpowiedź: $BD : DC = 2 : 3$

Dwusieczna nie musi być środkową; podział wynika ze stosunku boków.

3. BD: DC=2:3. Trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość.

Odpowiedź: $2 : 3$

Przy wspólnej wysokości pole jest proporcjonalne do podstawy, nie do jej kwadratu.

Grupa B

1. Dwusieczna AD: AB: AC=3:5.

Odpowiedź: $3 : 5$

Twierdzenie o dwusiecznej zachowuje kolejność odpowiadających boków.

2. AB: AC=3:4, a AD jest dwusieczną.

Odpowiedź: $BD : DC = 3 : 4$

Równy podział byłby możliwy tylko przy równych bokach AB i AC.

3. BD: DC=3:4. Trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość.

Odpowiedź: $3 : 4$

Wspólna wysokość skraca się w ilorazie pól; pozostaje iloraz podstaw.

5 / Matematyka w świecie

1. Trójkątna działka ma boki od jednego narożnika 8 i 12 m. Ścieżka biegnie po dwusiecznej tego narożnika. Jak dzieli przeciwległy bok długości 10 m?

Odpowiedź: 4 m, 6 m

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. Podział jest w stosunku 2:3; suma pięciu części wynosi 5 k.

2. Trójkątną reklamę podzielono od narożnika A po dwusiecznej. AB: AC=3:4. Jedna część ABD zużywa 6 jednostek farby. Ile zużyje ACD przy jednakowym pokryciu?

Odpowiedź: 8

Zużycie jest proporcjonalne do pola, a pola są w stosunku 3:4.

3. W modelu trójkątnej próbki środkowa AD jest także dwusieczną. Długość AB wynosi 2 mm. Odtwórz długość AC.

Odpowiedź: 2 mm

Równy podział BC i twierdzenie o dwusiecznej wymuszają równość AB i AC.

4. Ścieżka AD jest dwusieczną i dzieli BC na 4 oraz 6 m. AB ma 8 m. Odtwórz AC.

Odpowiedź: 12 m

$AB/AC = 2/3$, zatem $AC = 8 \cdot 3/2 = 12$ m.