Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Dwa rodzaje ciągów

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Mamy $a_1 = 8$ i $a_9 = 32$. Kwadrat środkowego wyrazu to iloczyn sąsiednich, zatem $32^2 = 8(3k+5)$. Stąd $3k+5 = 128$, czyli $k = 41$.

Odpowiedź: $k = 41$

1 / Od schematu do wyzwania

1. $a_n = 2(n+1)$. Ciąg (a_1, a_5, a_j) jest geometryczny. Wyznacz j.

Odpowiedź: $j = 17$

$a_1 = 4$, $a_5 = 12$. Z warunku geometryczności $a_j = a_5^2/a_1 = 36$, zatem $j + 1 = 18$.

2. $a_n = 2n + 2$. Wyznacz x, aby (a_1, x, a_5) był ciągiem arytmetycznym.

Odpowiedź: 8

$a_1 = 4, a_5 = 12$, więc $x = (a_1 + a_5)/2 = 8$.

3. Wyznacz wszystkie x, dla których $(x-1, 2, x+2)$ jest ciągiem geometrycznym.

Odpowiedź: $x \in \{-3, 2\}$

Warunek $4 = (x-1)(x+2)$ daje $x^2 + x - 6 = 0$, czyli x=2 lubx=-3. Obie trójki mają niezerowy pierwszy wyraz i stały iloraz.

4. $a_n = 2(n+1)$. Wyznacz dodatnie x, aby (a_1, x, a_7) był ciągiem geometrycznym.

Odpowiedź: 8

$a_1 = 4, a_7 = 16$. Mamy $x^2 = 64$, więc dodatni x=8.

5. Trzy różne dodatnie liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Wykaż, że po zwiększeniu środkowej o 1 nie mogą tworzyć ciągu geometrycznego.

Odpowiedź: Taka trójka nie istnieje.

Zapisujemy liczby jako $b-d, b, b+d$ z b>d>0. Warunek geometryczny po zmianie dawałby $(b+1)^2 = b^2 - d^2$, czyli $2b + 1 = -d^2$. Lewa strona jest dodatnia, prawa ujemna.

6. Znajdź wszystkie rosnące trójki dodatnich liczb całkowitych (a,b,c), które są arytmetyczne, a po zmniejszeniu środkowej o 1 stają się geometryczne.

Odpowiedź: $(a, b, c) = (2k^2,\ 2k^2 + 2k + 1,\ 2(k+1)^2),\ k = 1, 2, \ldots$

Niech $a = b - d, c = b + d$, d>0. Z $(b-1)^2 = ac = b^2 - d^2$ mamy $d^2 = 2b - 1$, więc d jest nieparzyste. Piszemy $d = 2k+1$. Otrzymujemy $b = 2k^2+2k+1, a = 2k^2, c = 2(k+1)^2$. Dodatniość a wymaga k≥1. Wstawienie sprawdza każdą trójkę.

2 / Małe kroki

1. Uzupełnij x, by $(2, x, 6)$ był arytmetyczny.

Odpowiedź: 4

Środkowy wyraz jest średnią sąsiednich.

2. Uzupełnij dodatnie x, by $(2, x, 8)$ był geometryczny.

Odpowiedź: 4

$x^2 = 16$ i wybieramy dodatni pierwiastek.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Podaj różnicę ciągu $2, 4, 6$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy kolejne wyrazy.

2. Podaj iloraz ciągu $2, 4, 8$.

Odpowiedź: 2

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. Uzupełnij arytmetyczny $(2, x, 6)$.

Odpowiedź: 4

Środkowy wyraz to średnia skrajnych.

4. Uzupełnij dodatni geometryczny $(2, x, 8)$.

Odpowiedź: 4

$x^2 = 16$, a x>0.

Grupa B

1. Podaj różnicę ciągu $3, 5, 7$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy kolejne wyrazy.

2. Podaj iloraz ciągu $3, 6, 12$.

Odpowiedź: 2

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. Uzupełnij arytmetyczny $(3, x, 7)$.

Odpowiedź: 5

Środkowy wyraz to średnia skrajnych.

4. Uzupełnij dodatni geometryczny $(3, x, 12)$.

Odpowiedź: 6

$x^2 = 36$, a x>0.

Grupa C

1. Podaj różnicę ciągu $4, 6, 8$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy kolejne wyrazy.

2. Podaj iloraz ciągu $4, 8, 16$.

Odpowiedź: 2

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. Uzupełnij arytmetyczny $(4, x, 8)$.

Odpowiedź: 6

Środkowy wyraz to średnia skrajnych.

4. Uzupełnij dodatni geometryczny $(4, x, 16)$.

Odpowiedź: 8

$x^2 = 64$, a x>0.

Grupa D

1. Podaj różnicę ciągu $5, 7, 9$.

Odpowiedź: 2

Odejmujemy kolejne wyrazy.

2. Podaj iloraz ciągu $5, 10, 20$.

Odpowiedź: 2

Dzielimy drugi wyraz przez pierwszy.

3. Uzupełnij arytmetyczny $(5, x, 9)$.

Odpowiedź: 7

Środkowy wyraz to średnia skrajnych.

4. Uzupełnij dodatni geometryczny $(5, x, 20)$.

Odpowiedź: 10

$x^2 = 100$, a x>0.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. $(2, x, 6)$ ma być arytmetyczny.

Odpowiedź: $x = 4$

W ciągu arytmetycznym używamy średniej arytmetycznej, nie iloczynu skrajnych.

2. $(2, x, 8)$ ma być dodatni i geometryczny.

Odpowiedź: $x = 4$

Użyto średniej arytmetycznej. Potrzebny jest warunek $x^2=a_1a_3$.

3. $a_n = 2n$. Uczeń opisuje ciąg.

Odpowiedź: Ciąg jest arytmetyczny o różnicy 2.

Kolejne różnice są równe a, ale kolejne ilorazy zmieniają się.

Grupa B

1. $(3, x, 9)$ ma być arytmetyczny.

Odpowiedź: $x = 6$

W ciągu arytmetycznym używamy średniej arytmetycznej, nie iloczynu skrajnych.

2. $(3, x, 12)$ ma być dodatni i geometryczny.

Odpowiedź: $x = 6$

Użyto średniej arytmetycznej. Potrzebny jest warunek $x^2=a_1a_3$.

3. $a_n = 3n$. Uczeń opisuje ciąg.

Odpowiedź: Ciąg jest arytmetyczny o różnicy 3.

Kolejne różnice są równe a, ale kolejne ilorazy zmieniają się.

5 / Matematyka w świecie

1. Liczby miejsc w trzech rzędach tworzą ciąg arytmetyczny: $4, x, 12$. Wyznacz x.

Odpowiedź: 8

Średnia skrajnych to połowa ich sumy.

2. Trzy kolejne dodatnie salda w symulacji tworzą ciąg geometryczny: $4, x, 16$ zł. Wyznacz x.

Odpowiedź: 8 zł

$x^2 = 64$, a saldo jest dodatnie.

3. Trzy odczyty dodatniego modelu geometrycznego wynoszą $2, x, 18$ jednostek. Wyznacz środkowy odczyt.

Odpowiedź: 6

$x^2 = 36$, stąd dodatni x=6.

4. Wiadomo, że $(u, 8, v)$ jest arytmetyczny, a $uv = 48$ i u<v. Odtwórz u,v.

Odpowiedź: $u = 4, v = 12$

$u + v = 16$ i $uv = 48$. Liczby są pierwiastkami $z^2 - 16z + 48 = 0$: 4 i 12.