Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Równanie wymierne

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Wykluczamy $x = \frac{1}{3}$. Mnożymy przez mianowniki: $5(x+2) = 2(3x-1)$. Po uporządkowaniu mamy $x = 12$. Wynik nie zeruje mianownika. Odpowiedź: D.

Odpowiedź: D

1 / Od schematu do wyzwania

1. Rozwiąż $\frac{x+3}{x-3} = 2$.

Odpowiedź: 9

$x \neq 3$. Po pomnożeniu $x+3 = 2x-6$, więc $x = 9$, co nie zeruje mianownika.

2. Rozwiąż $\frac{x+3}{x-3} = 3$.

Odpowiedź: 6

$x \neq 3$. Równanie daje $x+3 = 3x-9$, stąd $2x = 12$ i $x = 6$.

3. Rozwiąż $\frac{x+6}{x-3} = \frac{x+6}{6}$.

Odpowiedź: $x = -6$ lub $x = 9$

$x \neq 3$. Po pomnożeniu przez mianowniki: $(x+6)(6-(x-3)) = 0$. Stąd $x = -6$ albo $x = 9$. Oba wyniki spełniają wykluczenie.

4. Rozwiąż nierówność $\frac{x-3}{x+3} > 0$.

Odpowiedź: $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Wykluczamy $x = -3$. Iloraz jest dodatni, gdy licznik i mianownik mają te same znaki, co zachodzi w dwóch zewnętrznych przedziałach. $x = 3$ daje zero, więc też go nie włączamy.

5. W zależności od rzeczywistego b rozwiąż $\frac{(x-3)(x-b)}{x-3} = 0$.

Odpowiedź: $x = b$ dla $b \neq 3$; $\varnothing$ dla $b = 3$

Wykluczenie $x \neq 3$ obowiązuje także po skróceniu. Dostajemy $x - b = 0$. Gdy $b \neq 3$, jest to dopuszczalny pierwiastek. Gdy $b = 3$, jedyna kandydatura jest wykluczona.

6. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x, y) spełniające $1/x + 1/y = 1/3$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $\{(4,12), (6,6), (12,4)\}$

Obie liczby muszą przekraczać 3, bo każdy dodatni składnik jest mniejszy od sumy. Po pomnożeniu przez $3xy$ otrzymujemy $xy = 3(x+y)$, czyli $(x-3)(y-3) = 9$. Każdy dodatni dzielnik d liczby 9 daje dokładnie jedną uporządkowaną parę $x = 3+d$, $y = 3+9/d$. Przegląd wszystkich dzielników daje odpowiedź.

2 / Małe kroki

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-3)$.

Odpowiedź: $x \neq 3$

Mianownik nie może być zerem.

2. Uprość $3x/3$.

Odpowiedź: x

Skracamy niezerowy czynnik 3.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-3)$.

Odpowiedź: $x \neq 3$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/3 + 1/3$.

Odpowiedź: $\frac{2}{3}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/3$ dla $x = 6$.

Odpowiedź: 2

$6/3 = 2$.

4. Uprość $(x-3)/(x-3)$ dla $x \neq 3$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa B

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-4)$.

Odpowiedź: $x \neq 4$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/4 + 1/4$.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/4$ dla $x = 8$.

Odpowiedź: 2

$8/4 = 2$.

4. Uprość $(x-4)/(x-4)$ dla $x \neq 4$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa C

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-5)$.

Odpowiedź: $x \neq 5$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/5 + 1/5$.

Odpowiedź: $\frac{2}{5}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/5$ dla $x = 10$.

Odpowiedź: 2

$10/5 = 2$.

4. Uprość $(x-5)/(x-5)$ dla $x \neq 5$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

Grupa D

1. Podaj wykluczenie dla $1/(x-6)$.

Odpowiedź: $x \neq 6$

Mianownik musi być niezerowy.

2. Oblicz $1/6 + 1/6$.

Odpowiedź: $\frac{1}{3}$

Dodajemy liczniki przy wspólnym mianowniku.

3. Oblicz $x/6$ dla $x = 12$.

Odpowiedź: 2

$12/6 = 2$.

4. Uprość $(x-6)/(x-6)$ dla $x \neq 6$.

Odpowiedź: 1

Niezerowa liczba podzielona przez siebie daje 1.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Upraszczano $(x+3)/x$ dla x≠0.

Odpowiedź: $1+3/x$

Nie skracamy składników sumy; dzielimy każdy składnik licznika przez mianownik.

2. Skrócono $(x^2-9)/(x-3)$.

Odpowiedź: $x+3,\ x\neq 3$

Skracanie nie przywraca wartości wykluczonej z pierwotnego mianownika.

3. Rozwiązano $x/(x-3)=0$.

Odpowiedź: 0

Ułamek jest zerem, gdy licznik jest zerem i mianownik niezerowy. Wskazana błędna wartość zeruje mianownik.

Grupa B

1. Upraszczano $(x+4)/x$ dla x≠0.

Odpowiedź: $1+4/x$

Nie skracamy składników sumy; dzielimy każdy składnik licznika przez mianownik.

2. Skrócono $(x^2-16)/(x-4)$.

Odpowiedź: $x+4,\ x\neq 4$

Skracanie nie przywraca wartości wykluczonej z pierwotnego mianownika.

3. Rozwiązano $x/(x-4)=0$.

Odpowiedź: 0

Ułamek jest zerem, gdy licznik jest zerem i mianownik niezerowy. Wskazana błędna wartość zeruje mianownik.

5 / Matematyka w świecie

1. Koszt wykonania n sztuk to $K(n)=3n+100$. Wyraź średni koszt jednej sztuki dla n>0.

Odpowiedź: $3+\frac{100}{n}$

Dzielimy koszt całkowity przez n: $K(n)/n=3+100/n$.

2. Cena hurtowa za n sztuk wynosi $3n+9$ zł. Ile wynosi średnia cena dla $n=3$?

Odpowiedź: 6

Średnia to $3+9/n$, czyli po podstawieniu 6 zł.

3. W roztworze jest 6 g substancji w 3 litrach. Wyraź stężenie $c(V)=6/V$ i oblicz je po dolaniu 3 litrów wody.

Odpowiedź: 1

Nowa objętość wynosi 6 l, a masa substancji się nie zmienia. $c=6/6=1$ g/l.

4. Zadanie odwrócone: średni koszt $3+100/n$ wyniósł 8 zł. Wyznacz dodatnie n.

Odpowiedź: 20

$100/n=5$, zatem $n=20$.