Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Równanie iloczynowe

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Zerowanie czynników daje $x = -3$, $x = m$ lub $x = -2$. Suma trzech różnych rozwiązań spełnia równanie $-3+m-2 = 0$, stąd $m = 5$. Pokrywanie się m z jedną z liczb ujemnych daje ujemną sumę dwóch różnych rozwiązań, więc odpada. Odpowiedź: C.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. Podaj wszystkie różne pierwiastki $x(x-3)(x+3) = 0$ i ich sumę.

Odpowiedź: $-3, 0, 3;\ S = 0$

Zerujemy każdy czynnik. Przeciwne liczby się redukują w sumie.

2. Ile różnych rzeczywistych rozwiązań ma $(x^2-9)(x^2+16) = 0$?

Odpowiedź: 2

Drugi czynnik jest zawsze dodatni. Pierwszy zeruje się dla $x = \pm 3$.

3. Suma wszystkich różnych rozwiązań $(x-3)(x-6)(x-m) = 0$ wynosi 0. Wyznacz m.

Odpowiedź: -9

Gdy m jest różne od 3 i 6, suma to $9 + m$, więc $m = -9$. Gdy m pokrywa się ze znanym dodatnim pierwiastkiem, suma różnych pierwiastków pozostaje 9, a nie 0.

4. Dla jakich m równanie $x(x-3)(x-m) = 0$ ma dokładnie dwa różne pierwiastki?

Odpowiedź: $m \in \{0, 3\}$

Znane pierwiastki 0 i 3 są różne. Trzeci nie może być nową liczbą, więc m musi być jedną z tych dwóch wartości.

5. Czy istnieje m, dla którego $x(x-3)(x-m) = 0$ ma trzy różne pierwiastki o sumie 3? Uzasadnij.

Odpowiedź: nie

Przy trzech różnych pierwiastkach suma wynosi $0 + 3 + m$. Warunek sumy daje m=0, ale wtedy są tylko dwa różne pierwiastki. Zachodzi sprzeczność.

6. Wyznacz wszystkie rzeczywiste k, dla których $(x^2-9)(x^2-kx+9) = 0$ ma dokładnie trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

Odpowiedź: $\varnothing$

Pierwszy czynnik daje zawsze $x = \pm 3$. W drugim wyróżnik wynosi $k^2 - 36$. Gdy jest ujemny, mamy tylko dwa znane pierwiastki. Gdy wynosi zero, k=±6, a jego jedyny pierwiastek jest już równy ±3. Gdy wyróżnik jest dodatni, drugi czynnik ma dwa pierwiastki. Żaden nie pokrywa się z ±3: takie pokrycie wymusiłoby k=±6, czyli wyróżnik zero. Dostajemy wtedy cztery różne pierwiastki. Liczba trzech rozwiązań jest niemożliwa.

2 / Małe kroki

1. Rozwiąż $x(x-3) = 0$.

Odpowiedź: $x = 0$ lub $x = 3$

Iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden czynnik jest zerem.

2. Rozwiąż $x^2 = 9$.

Odpowiedź: $x = \pm 3$

Obie liczby 3 oraz -3 mają kwadrat 9.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Rozwiąż $x(x-3) = 0$.

Odpowiedź: $0, 3$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2 - 9 = 0$.

Odpowiedź: ± 3

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-3)^2 = 0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+3) = 0$.

Odpowiedź: -3

Pierwiastki 0 i -3 sumują się do -3.

Grupa B

1. Rozwiąż $x(x-4) = 0$.

Odpowiedź: $0, 4$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2 - 16 = 0$.

Odpowiedź: ± 4

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-4)^2 = 0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+4) = 0$.

Odpowiedź: -4

Pierwiastki 0 i -4 sumują się do -4.

Grupa C

1. Rozwiąż $x(x-5) = 0$.

Odpowiedź: $0, 5$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2 - 25 = 0$.

Odpowiedź: ± 5

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-5)^2 = 0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+5) = 0$.

Odpowiedź: -5

Pierwiastki 0 i -5 sumują się do -5.

Grupa D

1. Rozwiąż $x(x-6) = 0$.

Odpowiedź: $0, 6$

Zerujemy pierwszy lub drugi czynnik.

2. Rozwiąż $x^2 - 36 = 0$.

Odpowiedź: ± 6

Obliczamy dwa pierwiastki równania kwadratowego.

3. Ile różnych rozwiązań ma $(x-6)^2 = 0$?

Odpowiedź: 1

Podwójny pierwiastek jest jedną liczbą.

4. Oblicz sumę pierwiastków $x(x+6) = 0$.

Odpowiedź: -6

Pierwiastki 0 i -6 sumują się do -6.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Rozwiązywano $x(x-3)=0$.

Odpowiedź: $x=0$ lub $x=3$

Dzielenie przez x zgubiło rozwiązanie x=0.

2. Rozwiązywano $x^2=9$.

Odpowiedź: $x=\pm 3$

Równanie kwadratowe ma także ujemne rozwiązanie.

3. Liczono różne rozwiązania $x(x-3)^2=0$.

Odpowiedź: 2 rozwiązania

Krotność czynnika nie zwiększa liczby różnych liczb będących rozwiązaniami.

Grupa B

1. Rozwiązywano $x(x-4)=0$.

Odpowiedź: $x=0$ lub $x=4$

Dzielenie przez x zgubiło rozwiązanie x=0.

2. Rozwiązywano $x^2=16$.

Odpowiedź: $x=\pm 4$

Równanie kwadratowe ma także ujemne rozwiązanie.

3. Liczono różne rozwiązania $x(x-4)^2=0$.

Odpowiedź: 2 rozwiązania

Krotność czynnika nie zwiększa liczby różnych liczb będących rozwiązaniami.

5 / Matematyka w świecie

1. W modelu zysk $Z(n)=(n-3)(n-6)$. Dla jakich nieujemnych n zysk wynosi zero?

Odpowiedź: $3, 6$

Iloczyn jest zerem, gdy którykolwiek z jego czynników jest zerem.

2. Umowny bilans $B(t)=t(t-3)(t-4)$. Podaj wszystkie nieujemne chwile zerowego bilansu.

Odpowiedź: $0, 3, 4$

Każdy czynnik liniowy daje jedną z wymienionych chwil.

3. Czujnik ma model $S(t)=(t^2-9)(t^2+1)$. Podaj nieujemne chwile t, w których odczyt jest zerowy.

Odpowiedź: 3

Drugi czynnik jest dodatni. Pierwszy daje ±3, a warunek t≥0 pozostawia 3.

4. Zadanie odwrócone: równanie $x(x-m)=0$ ma dwa różne pierwiastki o sumie 3. Wyznacz m.

Odpowiedź: 3

Pierwiastki to 0 i m. Ich suma to m, stąd $m=3$; ponieważ 3>0, są różne.