Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Kwadrat sumy

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Wyrażenie to $(x+5)^2$. Po podstawieniu mamy $(\sqrt{2}-5+5)^2=2$. Odpowiedź: A.

Odpowiedź: A

1 / Od schematu do wyzwania

1. Oblicz x^2+4x+4 dla $x=\sqrt{3}-2$.

Odpowiedź: 3

Wyrażenie to $(x+2)^2$, więc po podstawieniu zostaje $(\sqrt{3})^2=3$.

2. Uprość $(x+2)^2-(x-2)^2$.

Odpowiedź: $8x$

Po rozwinięciu kwadraty x i stałe się redukują; pozostają dwa składniki liniowe.

3. Rozłóż na czynniki x^3-4x^2+4x.

Odpowiedź: $x(x-2)^2$

Wyłączamy x: $x(x^2-4x+4)$. Nawias jest kwadratem różnicy.

4. Wiadomo, że $u+v=4$ i $uv=1$. Oblicz u^2+v^2.

Odpowiedź: 14

$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=16-2=14$.

5. Wykaż, że $(x^2+1)^2\geq 4x^2$ dla każdego rzeczywistego x. Podaj warunek równości.

Odpowiedź: $x=\pm 1$

Różnica stron to $x^4+2x^2+1-4x^2=(x^2-1)^2\geq 0$. Równość zachodzi dokładnie, gdy $x^2=1$, czyli x=1 lub x=-1.

6. Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y) takie, że $x^2-y^2=24$. Uzasadnij kompletność.

Odpowiedź: $\{(7,5),(5,1)\}$

Rozkładamy: $(x-y)(x+y)=24$. Oznaczmy dodatnie czynniki przez d i e, gdzie d<e. Muszą mieć tę samą parzystość, aby $x=(d+e)/2$ i $y=(e-d)/2$ były całkowite. Sprawdzamy dzielniki d do $\sqrt{24}$. Wszystkie dopuszczalne pary czynników dają dokładnie pary wskazane w odpowiedzi; każda po podstawieniu spełnia równanie.

2 / Małe kroki

1. Rozwiń $(x+2)^2$.

Odpowiedź: x^2+4x+4

Korzystamy z $(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$.

2. Rozłóż na czynniki x^2-4.

Odpowiedź: $(x-2)(x+2)$

To różnica kwadratów: $u^2-v^2=(u-v)(u+v)$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Rozwiń $(x+2)^2$.

Odpowiedź: x^2+4x+4

Wzór: $(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$.

2. Rozłóż x^2-4.

Odpowiedź: $(x-2)(x+2)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(2+1)^2-(2-1)^2$.

Odpowiedź: 8

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 4 = 8$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $2x^2 + 4x$.

Odpowiedź: $2x(x + 2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

Grupa B

1. Rozwiń $(x + 3)^2$.

Odpowiedź: $x^2 + 6x + 9$

Wzór: $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

2. Rozłóż $x^2 - 9$.

Odpowiedź: $(x - 3)(x + 3)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(3 + 1)^2 - (3 - 1)^2$.

Odpowiedź: 12

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 6 = 12$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $3x^2 + 6x$.

Odpowiedź: $3x(x + 2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

Grupa C

1. Rozwiń $(x + 4)^2$.

Odpowiedź: $x^2 + 8x + 16$

Wzór: $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

2. Rozłóż $x^2 - 16$.

Odpowiedź: $(x - 4)(x + 4)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(4 + 1)^2 - (4 - 1)^2$.

Odpowiedź: 16

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 8 = 16$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $4x^2 + 8x$.

Odpowiedź: $4x(x + 2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

Grupa D

1. Rozwiń $(x + 5)^2$.

Odpowiedź: $x^2 + 10x + 25$

Wzór: $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

2. Rozłóż $x^2 - 25$.

Odpowiedź: $(x - 5)(x + 5)$

Stosujemy różnicę kwadratów.

3. Oblicz $(5 + 1)^2 - (5 - 1)^2$.

Odpowiedź: 20

Ze wzoru na różnicę kwadratów: $2 \cdot 10 = 20$.

4. Wyłącz wspólny czynnik w $5x^2 + 10x$.

Odpowiedź: $5x(x + 2)$

W obu składnikach występuje wspólny czynnik liczbowy i x.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Rozwijano $(x + 2)^2$.

Odpowiedź: $x^2 + 4x + 4$

Brakuje podwojonego iloczynu składników.

2. Rozkładano $x^2 - 4$.

Odpowiedź: $(x - 2)(x + 2)$

Różnica kwadratów nie jest kwadratem różnicy.

3. Obliczano $x^2 - (x + 2)^2$.

Odpowiedź: $-4x - 4$

Minus dotyczy całego rozwiniętego kwadratu, w tym składnika liniowego.

Grupa B

1. Rozwijano $(x + 3)^2$.

Odpowiedź: $x^2 + 6x + 9$

Brakuje podwojonego iloczynu składników.

2. Rozkładano $x^2 - 9$.

Odpowiedź: $(x - 3)(x + 3)$

Różnica kwadratów nie jest kwadratem różnicy.

3. Obliczano $x^2 - (x + 3)^2$.

Odpowiedź: $-6x - 9$

Minus dotyczy całego rozwiniętego kwadratu, w tym składnika liniowego.

5 / Matematyka w świecie

1. Kwadratowy ogródek zwiększono z boku 2 m do 4 m. O ile wzrosło pole?

Odpowiedź: 12

$(2 + 2)^2 - 2^2 = 12$ m^2.

2. Umowny koszt wynosi $K(x) = (x + 2)^2$ zł. O ile $K(x)$ przewyższa x^2?

Odpowiedź: $4x + 4$

Rozwijamy kwadrat i odejmujemy x^2. Pozostaje $4x + 4$ zł.

3. Dwie kwadratowe powierzchnie do badań mają boki $t + 2$ i $t - 2$, gdzie $t > 2$. Wyraź różnicę ich pól.

Odpowiedź: $8t$

Różnica pól jest różnicą kwadratów boków; po rozwinięciu pozostaje składnik liniowy.

4. Zadanie odwrócone: $(x + 2)^2 - x^2 = 16$. Wyznacz x.

Odpowiedź: 3

Po uproszczeniu $4x + 4 = 16$. Stąd $x = 3$.