Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Zagnieżdżone pierwiastki

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Wewnętrzny pierwiastek ma wykładnik $\frac{1}{2}$. Pod zewnętrznym pierwiastkiem dostajemy $5^{1+1/2} = 5^{3/2}$. Mnożymy wykładnik przez $\frac{1}{2}$, więc wynik to $5^{\frac{3}{4}}$.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. Oblicz $\sqrt{18}\sqrt{2} + 2^{-1}$.

Odpowiedź: $\frac{13}{2}$

Iloczyn pierwiastków to $\sqrt{36} = 6$, a $2^{-1} = 1/2$.

2. Zapisz jako potęgę liczby 4: $\sqrt{4\sqrt{4}}$.

Odpowiedź: $4^{3/4}$

Wewnętrzny pierwiastek ma wykładnik 1/2. W iloczynie sumujemy wykładniki, a przy zewnętrznym pierwiastku mnożymy je przez 1/2: $(1 + 1/2)/2 = 3/4$.

3. Uprość $\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}-1}$, usuwając pierwiastek z mianownika.

Odpowiedź: $\frac{5+2\sqrt{4}}{3}$

Mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt{4} + 1$. Mianownik wynosi 3, a licznik $5 + 2\sqrt{4}$.

4. Rozwiąż $\sqrt{x+3} = x$.

Odpowiedź: $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

Warunek: $x \geq 0$. Po podniesieniu do kwadratu $x^2 - x - 3 = 0$. Spośród pierwiastków $(1 \pm \sqrt{13})/2$ tylko dodatni spełnia warunek.

5. Udowodnij, że $\sqrt{n^2 + n}$ nie jest liczbą całkowitą dla żadnej dodatniej liczby całkowitej n.

Odpowiedź: brak takich n

Dla n>0 mamy $n^2 < n^2 + n < (n + 1)^2$, bo $n < 2n + 1$. Po spierwiastkowaniu $n < \sqrt{n^2 + n} < n + 1$. Między kolejnymi liczbami całkowitymi nie ma innej całkowitej.

6. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 6$.

Odpowiedź: $x = 10$

Dziedzina wymaga $x \geq 1$. Podstawiamy $u = \sqrt{x-1} \geq 0$. Wyrażenia pod pierwiastkami to $(u + 1)^2$ i $(u - 1)^2$. Równanie przyjmuje postać $u + 1 + |u - 1| = 6$. Dla $0 \leq u < 1$ lewa strona wynosi 2, a 6>2. Dla $u \geq 1$ mamy $2u = 6$, czyli $u = 3$ i $x = 10$. Sprawdzenie potwierdza wynik.

2 / Małe kroki

1. Oblicz $\sqrt{9}$.

Odpowiedź: 3

Pierwiastek kwadratowy jest nieujemny: $\sqrt{9} = 3$.

2. Uprość $\sqrt{36}/2$.

Odpowiedź: 3

Pierwiastek wynosi 6; po podzieleniu przez 2 otrzymujemy 3.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz $\sqrt{9}$.

Odpowiedź: 3

$3^2 = 9$.

2. Oblicz $\sqrt{36}$.

Odpowiedź: 6

$(6)^2 = 36$.

3. Oblicz 3^{-1}.

Odpowiedź: $\frac{1}{3}$

Potęga o wykładniku -1 jest odwrotnością podstawy.

4. Oblicz $\sqrt{9} + \sqrt{16}$.

Odpowiedź: 7

Dodajemy $3 + 4 = 7$.

Grupa B

1. Oblicz $\sqrt{16}$.

Odpowiedź: 4

$4^2 = 16$.

2. Oblicz $\sqrt{64}$.

Odpowiedź: 8

$(8)^2 = 64$.

3. Oblicz 4^{-1}.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Potęga o wykładniku -1 jest odwrotnością podstawy.

4. Oblicz $\sqrt{16} + \sqrt{25}$.

Odpowiedź: 9

Dodajemy $4 + 5 = 9$.

Grupa C

1. Oblicz $\sqrt{25}$.

Odpowiedź: 5

$5^2 = 25$.

2. Oblicz $\sqrt{100}$.

Odpowiedź: 10

$(10)^2 = 100$.

3. Oblicz 5^{-1}.

Odpowiedź: $\frac{1}{5}$

Potęga o wykładniku -1 jest odwrotnością podstawy.

4. Oblicz $\sqrt{25} + \sqrt{36}$.

Odpowiedź: 11

Dodajemy $5 + 6 = 11$.

Grupa D

1. Oblicz $\sqrt{36}$.

Odpowiedź: 6

$6^2 = 36$.

2. Oblicz $\sqrt{144}$.

Odpowiedź: 12

$(12)^2 = 144$.

3. Oblicz 6^{-1}.

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$

Potęga o wykładniku -1 jest odwrotnością podstawy.

4. Oblicz $\sqrt{36} + \sqrt{49}$.

Odpowiedź: 13

Dodajemy $6 + 7 = 13$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Obliczano $\sqrt{9}$.

Odpowiedź: 3

Symbol pierwiastka oznacza nieujemną wartość, nie parę rozwiązań równania.

2. Obliczano $\sqrt{9+16}$.

Odpowiedź: $\sqrt{25}$

Nie wolno rozdzielać pierwiastka z sumy na sumę pierwiastków.

3. Obliczano 3^{-2}.

Odpowiedź: $\frac{1}{9}$

Ujemny wykładnik oznacza odwrotność, a nie zmianę znaku.

Grupa B

1. Obliczano $\sqrt{16}$.

Odpowiedź: 4

Symbol pierwiastka oznacza nieujemną wartość, nie parę rozwiązań równania.

2. Obliczano $\sqrt{16+25}$.

Odpowiedź: $\sqrt{41}$

Nie wolno rozdzielać pierwiastka z sumy na sumę pierwiastków.

3. Obliczano 4^{-2}.

Odpowiedź: $\frac{1}{16}$

Ujemny wykładnik oznacza odwrotność, a nie zmianę znaku.

5 / Matematyka w świecie

1. Kwadratowa wykładzina ma pole $18\ \text{m}^2$. Oblicz dokładnie bok oraz obwód.

Odpowiedź: $3\sqrt{2};\ 12\sqrt{2}$

Bok to $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ m. Obwód jest cztery razy większy.

2. W modelu koszt jednostkowy wynosi $c=\sqrt{n}$ zł. Oblicz koszt jednostkowy i łączny dla $n=9$ sztuk.

Odpowiedź: $3;\ 27$

$c=\sqrt{9}=3$ zł; łącznie $nc=27$ zł.

3. W ćwiczeniowym modelu droga wynosi $s=t^2$. Dla $s=27$ wyznacz nieujemny czas t.

Odpowiedź: $3\sqrt{3}$

$t=\sqrt{s}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$. Wybieramy wartość nieujemną.

4. Zadanie odwrócone: $\sqrt{N}+\sqrt{N}=6$. Wyznacz N oraz sprawdź, czy jest naturalne.

Odpowiedź: 9

$2\sqrt{N}=6$, więc $\sqrt{N}=3$ i $N=9$.