Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Pierwiastki i potęga ujemna

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Łączymy pierwiastki: $\sqrt{\frac{25}{8}}\sqrt{2}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$. Potęga 2^{-1} to $\frac{1}{2}$. Dodajemy ułamki: 3. Odpowiedź: C.

Odpowiedź: C

1 / Od schematu do wyzwania

1. Oblicz $\sqrt{8}\sqrt{2}+2^{-1}$.

Odpowiedź: $\frac{9}{2}$

Iloczyn pierwiastków to $\sqrt{16}=4$, a $2^{-1}=1/2$.

2. Zapisz jako potęgę liczby 3: $\sqrt{3\sqrt{3}}$.

Odpowiedź: $3^{3/4}$

Wewnętrzny pierwiastek ma wykładnik 1/2. W iloczynie sumujemy wykładniki, a przy zewnętrznym pierwiastku mnożymy je przez 1/2: $(1+1/2)/2=3/4$.

3. Uprość $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, usuwając pierwiastek z mianownika.

Odpowiedź: $\frac{4+2\sqrt{3}}{2}$

Mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt{3}+1$. Mianownik wynosi 2, a licznik $4+2\sqrt{3}$.

4. Rozwiąż $\sqrt{x+2}=x$.

Odpowiedź: $x=\frac{1+\sqrt{9}}{2}$

Warunek: $x\geq 0$. Po podniesieniu do kwadratu $x^2-x-2=0$. Spośród pierwiastków $(1\pm\sqrt{9})/2$ tylko dodatni spełnia warunek.

5. Udowodnij, że $\sqrt{n^2+n}$ nie jest liczbą całkowitą dla żadnej dodatniej liczby całkowitej n.

Odpowiedź: brak takich n

Dla n>0 mamy $n^2<n^2+n<(n+1)^2$, bo $n<2n+1$. Po spierwiastkowaniu $n<\sqrt{n^2+n}<n+1$. Między kolejnymi liczbami całkowitymi nie ma innej całkowitej.

6. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=4$.

Odpowiedź: $x=5$

Dziedzina wymaga $x\geq 1$. Podstawiamy $u=\sqrt{x-1}\geq 0$. Wyrażenia pod pierwiastkami to $(u+1)^2$ i $(u-1)^2$. Równanie przyjmuje postać $u+1+|u-1|=4$. Dla $0\leq u<1$ lewa strona wynosi 2, a 4>2. Dla $u\geq 1$ mamy $2u=4$, czyli $u=2$ i $x=5$. Sprawdzenie potwierdza wynik.

2 / Małe kroki

1. Oblicz $\sqrt{4}$.

Odpowiedź: 2

Pierwiastek kwadratowy jest nieujemny: $\sqrt{4}=2$.

2. Uprość $\sqrt{16}/2$.

Odpowiedź: 2

Pierwiastek wynosi 4; po podzieleniu przez 2 otrzymujemy 2.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz $\sqrt{4}$.

Odpowiedź: 2

$2^2=4$.

2. Oblicz $\sqrt{16}$.

Odpowiedź: 4

$(4)^2 = 16.$

3. Oblicz 2^{-1}.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Potęga o wykładniku -1 jest odwrotnością podstawy.

4. Oblicz $\sqrt{4} + \sqrt{9}$.

Odpowiedź: 5

Dodajemy $2 + 3 = 5$.

Grupa B

1. Oblicz $\sqrt{9}$.

Odpowiedź: 3

$3^2 = 9.$

2. Oblicz $\sqrt{36}$.

Odpowiedź: 6

$(6)^2 = 36.$

3. Oblicz 3^{-1}.

Odpowiedź: $\frac{1}{3}$

Potęga o wykładniku -1 jest odwrotnością podstawy.

4. Oblicz $\sqrt{9} + \sqrt{16}$.

Odpowiedź: 7

Dodajemy $3 + 4 = 7$.

Grupa C

1. Oblicz $\sqrt{16}$.

Odpowiedź: 4

$4^2 = 16.$

2. Oblicz $\sqrt{64}$.

Odpowiedź: 8

$(8)^2 = 64.$

3. Oblicz 4^{-1}.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Potęga o wykładniku -1 jest odwrotnością podstawy.

4. Oblicz $\sqrt{16} + \sqrt{25}$.

Odpowiedź: 9

Dodajemy $4 + 5 = 9$.

Grupa D

1. Oblicz $\sqrt{25}$.

Odpowiedź: 5

$5^2 = 25.$

2. Oblicz $\sqrt{100}$.

Odpowiedź: 10

$(10)^2 = 100.$

3. Oblicz 5^{-1}.

Odpowiedź: $\frac{1}{5}$

Potęga o wykładniku -1 jest odwrotnością podstawy.

4. Oblicz $\sqrt{25} + \sqrt{36}$.

Odpowiedź: 11

Dodajemy $5 + 6 = 11$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Obliczano $\sqrt{4}$.

Odpowiedź: 2

Symbol pierwiastka oznacza nieujemną wartość, nie parę rozwiązań równania.

2. Obliczano $\sqrt{4+9}$.

Odpowiedź: $\sqrt{13}$

Nie wolno rozdzielać pierwiastka z sumy na sumę pierwiastków.

3. Obliczano 2^{-2}.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Ujemny wykładnik oznacza odwrotność, a nie zmianę znaku.

Grupa B

1. Obliczano $\sqrt{9}$.

Odpowiedź: 3

Symbol pierwiastka oznacza nieujemną wartość, nie parę rozwiązań równania.

2. Obliczano $\sqrt{9+16}$.

Odpowiedź: $\sqrt{25}$

Nie wolno rozdzielać pierwiastka z sumy na sumę pierwiastków.

3. Obliczano 3^{-2}.

Odpowiedź: $\frac{1}{9}$

Ujemny wykładnik oznacza odwrotność, a nie zmianę znaku.

5 / Matematyka w świecie

1. Kwadratowa wykładzina ma pole 8 m^2. Oblicz dokładnie bok oraz obwód.

Odpowiedź: $2\sqrt{2};\ 8\sqrt{2}$

Bok to $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ m. Obwód jest cztery razy większy.

2. W modelu koszt jednostkowy wynosi $c = \sqrt{n}$ zł. Oblicz koszt jednostkowy i łączny dla $n = 4$ sztuk.

Odpowiedź: $2;\ 8$

$c = \sqrt{4} = 2$ zł; łącznie $nc = 8$ zł.

3. W ćwiczeniowym modelu droga wynosi $s = t^2$. Dla $s = 12$ wyznacz nieujemny czas t.

Odpowiedź: $2\sqrt{3}$

$t = \sqrt{s} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Wybieramy wartość nieujemną.

4. Zadanie odwrócone: $\sqrt{N} + \sqrt{N} = 4$. Wyznacz N oraz sprawdź, czy jest naturalne.

Odpowiedź: 4

$2\sqrt{N} = 4$, więc $\sqrt{N} = 2$ i $N = 4$.