Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Losowanie bez zwracania

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Wszystkich uporządkowanych par bez powtórzeń jest $6 \cdot 5 = 30$. Dla parzystych pierwszych liczb liczby sprzyjających drugich losowań wynoszą: 2: 0, 4: 3, 6: 4. Łącznie mamy 7 par. Stąd $P(A) = \frac{7}{30} = \frac{7}{30}$.

Odpowiedź: $\frac{7}{30}$

1 / Od schematu do wyzwania

1. Ze zbioru $2, 3, 4, 5, 6, 7$ losujemy kolejno 2 różne liczby. Oblicz P, że pierwsza jest parzysta.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Dla kolejnych pierwszych liczb liczby sprzyjających drugich to 5,0,5,0,5,0. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 30, sprzyjających 15. Stąd $P = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

2. Ze zbioru $2, 3, 4, 5, 6, 7$ losujemy kolejno 2 różne liczby. Oblicz P, że iloczyn jest większy od 20.

Odpowiedź: $\frac{2}{5}$

Dla kolejnych pierwszych liczb liczby sprzyjających drugich to 0,1,2,2,3,4. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 30, sprzyjających 12. Stąd $P = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

3. Ze zbioru $2, 3, 4, 5, 6, 7$ losujemy kolejno 2 różne liczby. Oblicz P, że pierwsza jest parzysta i iloczyn jest większy od 20.

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$

Dla kolejnych pierwszych liczb liczby sprzyjających drugich to 0,0,2,0,3,0. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 30, sprzyjających 5. Stąd $P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

4. Ze zbioru $2, 3, 4, 5, 6, 7$ losujemy kolejno 2 różne liczby. Oblicz P, że suma jest podzielna przez 3.

Odpowiedź: $\frac{1}{3}$

Dla kolejnych pierwszych liczb liczby sprzyjających drugich to 2,1,2,2,1,2. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 30, sprzyjających 10. Stąd $P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

5. Ze zbioru $\{1, \ldots, 2k\}$ losujemy 2 liczby bez zwracania. P parzystej sumy wynosi 2/5. Znajdź całkowite $k \geq 2$.

Odpowiedź: 3

Parzystych i nieparzystych liczb jest po k. Sprzyja $2k(k-1)$ par z $2k(2k-1)$. Równanie $(k-1)/(2k-1) = 2/5$ daje $5k - 5 = 4k - 2$, stąd k=3.

6. Udowodnij, że losując bez zwracania 2 liczby ze zbioru $\{1, \ldots, 2k\}$, gdzie $k \geq 2$, otrzymamy parzystą sumę z P mniejszym niż 1/2.

Odpowiedź: $\frac{k-1}{2k-1} < \frac{1}{2}$

Suma jest parzysta, gdy oba wyniki mają tę samą parzystość. Sprzyja $2k(k-1)$ uporządkowanych par z $2k(2k-1)$. Porównanie $2(k-1) < 2k-1$ dowodzi tezy.

2 / Małe kroki

1. Z 4 różnych liczb losujemy kolejno 2 bez zwracania. Ile uporządkowanych par?

Odpowiedź: 12

Pierwszy wybór:4, drugi:3; $4 \cdot 3 = 12$. Wynik: 12.

2. Z liczb 1,2,3,4 losujemy kolejno 2 bez zwracania. Oblicz P pierwszej liczby parzystej.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Dwie możliwości pierwszej razy 3 możliwości drugiej. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 12, sprzyjających 6. Stąd $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Z 4 różnych liczb losujemy 2 kolejno bez zwracania. Ile par?

Odpowiedź: 12

Drugi wybór ma o 1 możliwość mniej. Wynik: 12.

2. Z 1,2,3 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$

$3 \cdot 2 = 6$ wyników. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 6, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

3. Z 1,2,3,4 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pary(2,2).

Odpowiedź: 0

Takiej pary nie można uzyskać. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 12, sprzyjających 0. Stąd $P = \frac{0}{12} = 0$.

4. Z 1,2,3,4 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pierwszej liczby 1.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Po 1 można wybrać 2,3 lub 4. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 12, sprzyjających 3. Stąd $P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Grupa B

1. Z 5 różnych liczb losujemy 2 kolejno bez zwracania. Ile par?

Odpowiedź: 20

Drugi wybór ma o 1 możliwość mniej. Wynik: 20.

2. Z 1,2,3 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$

$3 \cdot 2 = 6$ wyników. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 6, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

3. Z 1,2,3,4 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pary(2,2).

Odpowiedź: 0

Takiej pary nie można uzyskać. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 12, sprzyjających 0. Stąd $P = \frac{0}{12} = 0$.

4. Z 1,2,3,4 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pierwszej liczby 1.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Po 1 można wybrać 2,3 lub 4. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 12, sprzyjających 3. Stąd $P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Grupa C

1. Z 6 różnych liczb losujemy 2 kolejno bez zwracania. Ile par?

Odpowiedź: 30

Drugi wybór ma o 1 możliwość mniej. Wynik: 30.

2. Z 1,2,3 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$

$3 \cdot 2 = 6$ wyników. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 6, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

3. Z 1,2,3,4 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pary(2,2).

Odpowiedź: 0

Takiej pary nie można uzyskać. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 12, sprzyjających 0. Stąd $P = \frac{0}{12} = 0$.

4. Z 1,2,3,4 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pierwszej liczby 1.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Po 1 można wybrać 2,3 lub 4. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 12, sprzyjających 3. Stąd $P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Grupa D

1. Z 7 różnych liczb losujemy 2 kolejno bez zwracania. Ile par?

Odpowiedź: 42

Drugi wybór ma o 1 możliwość mniej. Wynik: 42.

2. Z 1,2,3 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pary(1,2).

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$

$3 \cdot 2 = 6$ wyników. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 6, sprzyjających 1. Stąd $P = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

3. Z 1,2,3,4 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pary(2,2).

Odpowiedź: 0

Takiej pary nie można uzyskać. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 12, sprzyjających 0. Stąd $P = \frac{0}{12} = 0$.

4. Z 1,2,3,4 losujemy 2 bez zwracania. Oblicz P pierwszej liczby 1.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Po 1 można wybrać 2,3 lub 4. Wszystkich jednakowo prawdopodobnych wyników jest 12, sprzyjających 3. Stąd $P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. Z 5 liczb losujemy 2 kolejno bez zwracania.

Odpowiedź: 20

Po pierwszym losowaniu zostaje n-1 liczb.

2. Z 1,2,3 losujemy 2 kolejno bez zwracania. Szukamy P dokładnie pary(1,2).

Odpowiedź: $1/6$

Pary(1,2)i(2,1)są różnymi wynikami.

3. Z 1,2,3,4 losujemy 2 bez zwracania. Szukamy P pary(2,2).

Odpowiedź: 0

Powtórzenie tej samej liczby jest niemożliwe.

Grupa B

1. Z 6 liczb losujemy 2 kolejno bez zwracania.

Odpowiedź: 30

Po pierwszym losowaniu zostaje n-1 liczb.

2. Z 1,2,3 losujemy 2 kolejno bez zwracania. Szukamy P dokładnie pary(1,2).

Odpowiedź: $1/6$

Pary(1,2)i(2,1)są różnymi wynikami.

3. Z 1,2,3,4 losujemy 2 bez zwracania. Szukamy P pary(2,2).

Odpowiedź: 0

Powtórzenie tej samej liczby jest niemożliwe.

5 / Matematyka w świecie

1. Spośród 6 różnych osób wybieramy kolejno prowadzącego i zastępcę. Jaka jest szansa, że wskazana osoba będzie prowadzącym?

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$

Dla tej osoby jest 5 wyborów zastępcy z 30 par.

2. W kontroli 6 paragonów wybieramy kolejno 2 różne. Dwa paragony są błędne. Oblicz P, że oba wybrane będą błędne.

Odpowiedź: $\frac{1}{15}$

$2 \cdot 1/(6 \cdot 5) = 1/15$.

3. Wśród 8 oznaczonych próbek 3 mają cechę X. Losujemy 2 różne próbki kolejno. Oblicz P, że obie mają X.

Odpowiedź: $\frac{3}{28}$

$3 \cdot 2/(8 \cdot 7) = 3/28$.

4. Z n elementów losujemy 2 kolejno bez zwracania. Możliwych jest 30 par. Wyznacz n.

Odpowiedź: 6

$n(n-1) = 30$ daje n=6 lub-5. Liczba elementów jest dodatnia.