Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Obwód kwadratu ze współrzędnych

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

Długość boku wynosi $AB = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$. Obwód to cztery boki, czyli $16\sqrt{2}$.

Odpowiedź: B

1 / Od schematu do wyzwania

1. A=(-4,4), B=(8,20) są kolejnymi wierzchołkami kwadratu. Oblicz jego obwód i pole.

Odpowiedź: $80;\ 400$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Różnice współrzędnych to 3 k i 4 k, więc bok ma 5 k. Obwód: 20 k, pole: 25 k².

2. A=(0,0), B=(16,0), C=(16,12). Oblicz pole ABC i środek jego przeciwprostokątnej.

Odpowiedź: $96;\ (8, 6)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Kąt przy B jest prosty. Pole to 6 k², a przeciwprostokątna AC ma środek otrzymany przez średnie współrzędnych A i C.

3. A=(4,4), B=(20,8), D=(8,16) są wierzchołkami równoległoboku ABCD. Wyznacz C i punkt przecięcia przekątnych.

Odpowiedź: $C = (24, 20);\ S = (14, 12)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. $C = B + D - A$ daje (6 k,5 k). Punkt S jest środkiem AC, więc S=(7 k/2,3 k).

4. Przekątna kwadratu ma końce A=(0,0), C=(24,32). Wyznacz dwa pozostałe wierzchołki.

Odpowiedź: $(-4, 28),\ (28, 4)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Środek S=(3 k,4 k). Połowa przekątnej to wektor (3 k,4 k). Obracamy go o 90 stopni: (-4 k,3 k). Wierzchołki S±ten wektor to (-k,7 k) i (7 k,k).

5. Wykaż, że środkowe dowolnego trójkąta o wierzchołkach A,B,C przecinają się w punkcie $G = (A + B + C)/3$ (współrzędne liczymy osobno).

Odpowiedź: $G = (A + B + C)/3$

Środek BC to D=(B+C)/2. Punkt A+2/3(D-A)=(A+B+C)/3 leży na środkowej AD. Identyczny rachunek dla środkowej z B daje ten sam punkt, więc G jest ich przecięciem.

6. Kwadrat ma przekątną o końcach (0,0) i (u,v), gdzie u,v są całkowite i nie są oba zerem. Wyznacz warunek konieczny i wystarczający, aby pozostałe wierzchołki miały całkowite współrzędne.

Odpowiedź: u i v mają tę samą parzystość.

Pozostałe wierzchołki to $((u-v)/2, (v+u)/2)$ i $((u+v)/2, (v-u)/2)$: otrzymujemy je przez obrót połowy przekątnej o 90 stopni wokół jej środka. Obie współrzędne są całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy u+v i u-v są parzyste, czyli u,v mają tę samą parzystość.

2 / Małe kroki

1. A=(0,0), B=(12,16). Oblicz AB.

Odpowiedź: 20

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Odległość to $\sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = 5k$.

2. A=(0,0), B=(16,0), C=(0,12). Oblicz pole ABC.

Odpowiedź: 96

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Odcinki AB i AC są prostopadłe, zatem $P = AB \cdot AC/2 = 6k^2$.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Oblicz odległość (0,0) od (12,16).

Odpowiedź: 20

Stosujemy wzór na odległość punktów.

2. Znajdź środek odcinka (0,0),(8,16).

Odpowiedź: $(4, 8)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

3. Kwadrat ma bok 4. Oblicz pole.

Odpowiedź: 16

Pole to kwadrat długości boku.

4. Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(8,0),(0,4). Oblicz pole.

Odpowiedź: 16

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje t².

Grupa B

1. Oblicz odległość (0,0) od (15,20).

Odpowiedź: 25

Stosujemy wzór na odległość punktów.

2. Znajdź środek odcinka (0,0),(10,20).

Odpowiedź: $(5, 10)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

3. Kwadrat ma bok 5. Oblicz pole.

Odpowiedź: 25

Pole to kwadrat długości boku.

4. Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(10,0),(0,5). Oblicz pole.

Odpowiedź: 25

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje t².

Grupa C

1. Oblicz odległość (0,0) od (18,24).

Odpowiedź: 30

Stosujemy wzór na odległość punktów.

2. Znajdź środek odcinka (0,0),(12,24).

Odpowiedź: $(6, 12)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

3. Kwadrat ma bok 6. Oblicz pole.

Odpowiedź: 36

Pole to kwadrat długości boku.

4. Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(12,0),(0,6). Oblicz pole.

Odpowiedź: 36

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje t².

Grupa D

1. Oblicz odległość (0,0) od (21,28).

Odpowiedź: 35

Stosujemy wzór na odległość punktów.

2. Znajdź środek odcinka (0,0),(14,28).

Odpowiedź: $(7, 14)$

Liczymy średnie odpowiednich współrzędnych.

3. Kwadrat ma bok 7. Oblicz pole.

Odpowiedź: 49

Pole to kwadrat długości boku.

4. Trójkąt ma wierzchołki (0,0),(14,0),(0,7). Oblicz pole.

Odpowiedź: 49

Połowa iloczynu przyprostokątnych daje t².

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. A=(0,0), B=(12,16).

Odpowiedź: 20

Odległość to pierwiastek z sumy kwadratów różnic, a nie suma różnic.

2. Końce odcinka: (0,0),(8,16).

Odpowiedź: $(4, 8)$

Sumę każdej pary współrzędnych trzeba podzielić przez 2.

3. Przekątna kwadratu ma długość 8.

Odpowiedź: 32

Pole kwadratu jest połową kwadratu jego przekątnej.

Grupa B

1. A=(0,0), B=(15,20).

Odpowiedź: 25

Odległość to pierwiastek z sumy kwadratów różnic, a nie suma różnic.

2. Końce odcinka: (0,0),(10,20).

Odpowiedź: $(5, 10)$

Sumę każdej pary współrzędnych trzeba podzielić przez 2.

3. Przekątna kwadratu ma długość 10.

Odpowiedź: 50

Pole kwadratu jest połową kwadratu jego przekątnej.

5 / Matematyka w świecie

1. Na planie punkt startu to (0,0), a cel (12,16); jednostka to 1 m. Oblicz długość najkrótszego odcinka łączącego punkty.

Odpowiedź: 20 m

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Odległość euklidesowa wynosi 5 k.

2. Kwadratowy panel ma kolejne narożniki (0,0) i (12,16) w dm. Oblicz ilość materiału potrzebnego do pokrycia panelu.

Odpowiedź: 400 dm^2

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Długość boku wynosi 5 k, więc pole 25 k².

3. W modelu ruchu punkt przeszedł z (0,0) do (24,32) mm. Znajdź środek odcinka łączącego pozycje.

Odpowiedź: $(12, 16)$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. Średnie współrzędnych wynoszą 3 k i 4 k.

4. Trójkątny teren ma wierzchołki (0,0),(a,0),(0,12) w metrach. Jego pole wynosi 96 m². Odtwórz dodatnie a.

Odpowiedź: $a = 16$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 4$. $a \cdot 12/2 = 96$. Rozwiązanie równania daje a=4 k.