Klucz i wskazówki dla nauczyciela

Dowód zależności między kątami

Karty są odrębnymi propozycjami pracy. Poziomy konkursowe oznaczają autorską ocenę trudności, nie cytaty z konkretnego konkursu.

Zadanie źródłowe / rozwiązanie

W trójkącie prostokątnym ADC punkt E jest środkiem przeciwprostokątnej, więc $ED = EA$. Oznaczmy kąt przy A przez α, a kąt ABE przez β. Trójkąt ADE jest równoramienny, więc kąt ADE ma miarę α. Kąt EDB ma zatem miarę $180^\circ - \alpha$. Trójkąt DBE także jest równoramienny; jego kąty przy B i E mają miarę β, więc $180^\circ - \alpha = 180^\circ - 2\beta$. Stąd $\alpha = 2\beta$.

Odpowiedź: $|\angle CAB| = 2|\angle ABE|$

1 / Od schematu do wyzwania

1. ABC jest ostrokątny, CD to wysokość, BE środkowa; D leży na AB, E na AC. Dane DB=DE i kąt ABE=20 stopni. Oblicz CAB.

Odpowiedź: 40°

W prostokątnym ADC środek E przeciwprostokątnej spełnia EA=ED. Niech CAB=α, ABE=β. Trójkąt ADE daje ADE=α, więc EDB=180−α. W równoramiennym DBE jest też EDB=180−2β. Zatem α=2β.

2. Przy tych samych założeniach (CD wysokość, BE środkowa, DB=DE) kąt CAB wynosi 40 stopni. Oblicz ABE.

Odpowiedź: 20°

Zależność α=2β otrzymujemy przez porównanie kąta EDB w trójkątach ADE i DBE. Stąd β=α/2.

3. Prostokątny ADC ma AC=20. E jest środkiem AC i DB=DE, gdzie B leży na półprostej DA za D. Oblicz DB i EA.

Odpowiedź: $10;\ 10$

Przyjmijmy pomocniczo $k = 2$. EA=ED=AC/2=5 k. Założenie DB=DE daje również DB=5 k.

4. W trójkącie prostokątnym ADC punkt E jest środkiem AC. Udowodnij, że EA=ED, a następnie porównaj kąty EAD i ADE.

Odpowiedź: EA=ED oraz EAD=ADE.

Środek przeciwprostokątnej jest środkiem okręgu opisanego na prostokątnym trójkącie, więc EA i ED są promieniami. Trójkąt ADE jest równoramienny, dlatego kąty przy podstawie AD są równe.

5. ABC jest ostrokątny; CD jest wysokością, BE środkową. Jeśli DB=DE, wykaż $\angle CAB = 2\angle ABE$. Zaznacz, gdzie używasz każdego założenia.

Odpowiedź: $\angle CAB = 2\angle ABE$

Wysokość daje prostokątny ADC, a środkowa oznacza, że E jest środkiem AC. Stąd EA=ED. Dla α=CAB i β=ABE mamy ADE=α i EDB=180−α. Warunek DB=DE daje równoramienny DBE i EDB=180−2β. Po porównaniu α=2β.

6. ABC jest ostrokątny; CD jest wysokością, BE środkową. Wykaż odwrotność: jeśli $\angle CAB = 2\angle ABE$, to DB=DE.

Odpowiedź: $DB = DE$

Jak poprzednio EA=ED, więc dla α=CAB mamy EDB=180−α. W trójkącie DBE kąt DBE=ABE=β, gdyż D leży na AB. Z α=2β wynika BED=180−β−(180−2β)=β. Równe kąty przy B i E dają równe przeciwległe boki DE i DB.

2 / Małe kroki

1. Prostokątny trójkąt ADC ma przeciwprostokątną AC długości 4. E jest środkiem AC. Oblicz ED.

Odpowiedź: 2

Środek przeciwprostokątnej jest jednakowo odległy od wszystkich wierzchołków; ED=AC/2.

2. Trójkąt DBE jest równoramienny, DB=DE, a kąt DBE ma 20°. Oblicz BDE.

Odpowiedź: 140°

Kąty przy podstawie BE są równe. Od 180 odejmujemy dwa razy podaną miarę.

Zadanie 3 jest oryginałem CKE; odpowiedź i rozwiązanie znajdują się na początku klucza.

3 / Rozgrzewka / 4 grupy

Każdy numer: 1 punkt; przy kilku odpowiedziach punkt za komplet poprawnych odpowiedzi. Czas: 5 minut.

Grupa A

1. Przeciwprostokątna ma 4. E jest jej środkiem. Ile wynosi odległość E od trzeciego wierzchołka?

Odpowiedź: 2

To promień okręgu opisanego, równy połowie przeciwprostokątnej.

2. Dwa kąty trójkąta równoramiennego mają po 20 stopni. Oblicz trzeci.

Odpowiedź: 140°

Suma kątów wynosi 180 stopni.

3. $\alpha = 2\beta$, $\beta = 20^\circ$. Oblicz α.

Odpowiedź: 40°

Podwajamy miarę β.

4. Jak środkowa BE dzieli bok AC?

Odpowiedź: AE=EC.

Środkowa łączy wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

Grupa B

1. Przeciwprostokątna ma 6. E jest jej środkiem. Ile wynosi odległość E od trzeciego wierzchołka?

Odpowiedź: 3

To promień okręgu opisanego, równy połowie przeciwprostokątnej.

2. Dwa kąty trójkąta równoramiennego mają po 21 stopni. Oblicz trzeci.

Odpowiedź: 138°

Suma kątów wynosi 180 stopni.

3. $\alpha = 2\beta$, $\beta = 21^\circ$. Oblicz α.

Odpowiedź: 42°

Podwajamy miarę β.

4. Jak środkowa BE dzieli bok AC?

Odpowiedź: AE=EC.

Środkowa łączy wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

Grupa C

1. Przeciwprostokątna ma 8. E jest jej środkiem. Ile wynosi odległość E od trzeciego wierzchołka?

Odpowiedź: 4

To promień okręgu opisanego, równy połowie przeciwprostokątnej.

2. Dwa kąty trójkąta równoramiennego mają po 22 stopni. Oblicz trzeci.

Odpowiedź: 136°

Suma kątów wynosi 180 stopni.

3. $\alpha = 2\beta$, $\beta = 22^\circ$. Oblicz α.

Odpowiedź: 44°

Podwajamy miarę β.

4. Jak środkowa BE dzieli bok AC?

Odpowiedź: AE=EC.

Środkowa łączy wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

Grupa D

1. Przeciwprostokątna ma 10. E jest jej środkiem. Ile wynosi odległość E od trzeciego wierzchołka?

Odpowiedź: 5

To promień okręgu opisanego, równy połowie przeciwprostokątnej.

2. Dwa kąty trójkąta równoramiennego mają po 23 stopni. Oblicz trzeci.

Odpowiedź: 134°

Suma kątów wynosi 180 stopni.

3. $\alpha = 2\beta$, $\beta = 23^\circ$. Oblicz α.

Odpowiedź: 46°

Podwajamy miarę β.

4. Jak środkowa BE dzieli bok AC?

Odpowiedź: AE=EC.

Środkowa łączy wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

4 / Znajdź błąd / 2 grupy

Po 1 punkcie za wskazanie błędu i 1 za poprawę z uzasadnieniem: 6 punktów na grupę.

Grupa A

1. CD jest wysokością ABC.

Odpowiedź: CD jest prostopadłe do AB.

Wysokość nie musi dzielić boku na połowy.

2. BE jest środkową trójkąta ABC.

Odpowiedź: AE=EC.

Prostopadłość dotyczy wysokości, środkowa prowadzi do środka boku.

3. W opisanym układzie DB=DE i ABE=20 stopni.

Odpowiedź: 40°

Porównanie kątów w dwóch równoramiennych trójkątach daje CAB=2·ABE.

Grupa B

1. CD jest wysokością ABC.

Odpowiedź: CD jest prostopadłe do AB.

Wysokość nie musi dzielić boku na połowy.

2. BE jest środkową trójkąta ABC.

Odpowiedź: AE=EC.

Prostopadłość dotyczy wysokości, środkowa prowadzi do środka boku.

3. W opisanym układzie DB=DE i ABE=21 stopni.

Odpowiedź: 42°

Porównanie kątów w dwóch równoramiennych trójkątach daje CAB=2·ABE.

5 / Matematyka w świecie

1. Trójkątna rama ADC ma kąt prosty przy D i przekątny bok AC=20 dm. E jest środkiem AC. Oblicz długość wspornika ED.

Odpowiedź: 10 dm

Środek przeciwprostokątnej jest równoodległy od wierzchołków; ED=AC/2.

2. Do prostokątnej trójkątnej ramy z przeciwprostokątną 20 dm dodaje się pręt od kąta prostego do środka przeciwprostokątnej. Ile dm materiału potrzeba?

Odpowiedź: 10 dm

Szukany odcinek ma połowę długości przeciwprostokątnej.

3. W modelu trójkątnej próbki z kątem prostym przeciwprostokątna ma 4 mm. Jej środek łączy się z trzecim wierzchołkiem. Oblicz odległość.

Odpowiedź: 2 mm

To odległość od środka okręgu opisanego do wierzchołka, czyli połowa przeciwprostokątnej.

4. W prostokątnym trójkątnym elemencie odcinek od kąta prostego do środka przeciwprostokątnej ma 2 cm. Odtwórz długość przeciwprostokątnej.

Odpowiedź: 4 cm

Odwracamy zależność m=c/2, otrzymując c=2 m.